Máster:

Matemáticas y Aplicaciones

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

TOPOLOGÍAS DÉBILES, REFLEXIVIDAD Y TEOREMAS RELACIONADOS.

ALBERTO ANGUREL ANDRÉS

Trabajo Final

Asignatura	Fundamentos de Análisis Matemático
Profesor	Dragan Vukotic Jovsic
Departamento	Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS

Fundamentos de Análisis Matemático. 2021/2022.

Universidad Autónoma de Madrid. 2021/2022

Índice

1. Introducción **2**

2. Motivación **2**

3. Preliminares **3**

4. Espacios Vectoriales Topológicos **3**
4.1. Teorema de Hahn-Banach 5

5. Topologías Débiles **9**

6. Propiedades de $\mathcal{B}(X^*)$ con la topología débil-estrella **11**
6.1. Teorema de Alaoglu y reflexividad 11
6.2. Separabilidad y metrizabilidad 12
6.3. Compactificación de Stone-Cech 15

7. Conjuntos Convexos **18**
7.1. Teorema de Krein-Milman 20
7.2. El teorema del punto fijo de Schauder 21
7.3. Teorema de Krein-Smulian 22

8. Compacidad débil **25**
8.1. Teorema de Eberlein-Smulian 25
8.2. Teorema de James 27

1. Introducción

Este trabajo pretende dar una exposición de la teoría básica de las topologías débiles y de algunas aplicaciones de estas en análisis funcional y otras áreas de las matemáticas.

Este trabajo ha sido completamente bibliográfico. Para el desarrollo de las definiciones básicas de las topologías débil y débil-estrella, se han utilizado las referencias [1] y [2], siendo la primera la principal referencia para cubrir los preliminares necesarios de análisis funcional. Así, en la sección 4 se establecen los preliminares necesarios sobre espacios vectoriales topológicos y, en particular, sobre espacios localmente convexos y en la sección 4.1 se demuestran los teoremas de Hahn-Banach, sobre extensión de funcionales y separación de conjuntos convexos en espacios vectoriales topológicos.

En la sección 5 se definen las topologías débiles y se comentan algunas propiedades básicas, siendo [2] la referencia utilizada para ello. Ya en la sección 6.1, se demuestra el teorema de Alaolgu sobre la compacidad de la bola unidad con la topología débil-estrella, para lo cual se ha leido en el estudio de la reflexividad de espacios de Banach. Nuevamente, en esta sección se han seguido [1] y [2]. Posteriormente, se han comentado en 6.2 algunas equivalencias interesantes entre la separabilidad de un espacio de Banach y la metrizabilidad de las bolas unidad con las topologías débiles, resultados importantes para caracterizar los subconjuntos compactos de la topología débil y en otras areas de las matemáticas, como el Principio de Selección de Helly. En 6.3, se comenta la compactificación de Stone-Cech y se utiliza para utilizar un resultado muy importante en análisis funcional y teoría de la medida: el teorema de representación de Riesz-Kakutani.

Ya en la sección 7 se estudian las propiedades de los conjuntos convexos y de sus puntos extremos, así como su relación con las topologías débiles. Los teoremas de Krein-Milman y Krein-Smulian son los principales resultados obtenidos. En esta sección, la referencia principal ha sido [2], aunque se ha utilizado también [6] para algunos ejemplos.

Por último, la sección 8 está dedicada a la caracterización de los conjuntos compactos con la topología débil. En 8.1, se caracterizan estos conjuntos según la compacidad por sucesiones. Para ello, se prueba el teorema de Eberlein-Smulian, utilizando [10]. Finalmente, en , se demuestra el teorema de James que caracteriza los conjuntos compactos débiles como aquellos en los que todo funcional del dual alcanza su supremo. Para el caso de un espacio de Banach separable, se ha utilizado [4], mientras que para el caso general se ha seguido [8] y [9].

2. Motivación

La introducción de las topologías débiles en un espacio normado busca relajar la noción de convergencia que, en un principio, requería que fuese en la topología de la norma. Dicha convergencia en norma puede ser un requerimiento demasiado fuerte en algunas ocasiones. Por ejemplo, en espacios de funciones habituales la convergencia en norma es equivalente a la convergencia uniforme, que es una condición más fuerte que la convergencia puntual. Así, para estudiar esta última no deberíamos trabajar con la topología de la norma.

En un espacio normado, la introducción de la topología débil busca estudiar la convergencia tras aplicar, sobre la sucesión original cualquier elemento del espacio dual. Análogamente, en un espacio dual X^*, la topología débil estrella estudia la convergencia tras actuar, los funcionales de la sucesión, sobre cualquier elemento del espacio X. Esta noción de convergencia es más débil pero, a cambio, eliminamos conjuntos abiertos de la topología, lo que permite obtener propiedades de compacidad de las que se deducen resultados muy interesantes.

Sin embargo, el hecho de eliminar abiertos de un espacio topológico puede hacer que se puedan perder ciertas propiedades de separación y numerabilidad. La propiedad de ser Hausdorff se conserva en este caso. No obstante, sí que se pierde el hecho de que el espacio verifique el I Axioma de Numerabilidad, lo que hace que el hecho de que un punto sea de acumulación de un cierto conjunto no implique que exista una sucesión en dicho conjunto convergente al punto.

El estudio de estos espacios topológicos permite deducir numerosas propiedades acerca de la convergencia puntual que no se tenían en la convergencia en norma. Así, el estudio de las topologías débiles permite deducir resultados como el Principio de Selección de Helly. Por otro lado, estos espacios topológicos también permiten definir la compactificación de Stone-Cech que se utiliza para dar una demostración del teorema de representación de Riesz-Kakutani, que establece que todo funcional del dual de un espacio de funciones continuas sobre un espacio totalmente regular es la integración sobre alguna medida definida en la σ-álgebra de Baire.

No obstante, más allá del estudio de estos espacios y de sus aplicaciones concretas, las técnicas utilizadas para la construcción de las topologías débiles podrían ser útiles en muchas situaciones de casi todas las areas de las matemáticas.

3. Preliminares

Para este trabajo, se ha asumido toda la teoría de topología elemental. Al cubrir temas avanzados, resulta imposible cubrir estos aspectos básicos en un espacio tan reducido. No obstante, sí que merece la pena comentar algunos conceptos y resultados que bien son algo avanzados o bien no son tan estándar en la literatura.

El primer concepto que mencionaré es el de *subbase* de una topología. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una subbase de $\mathcal{T}$ se define como un subconjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{T}$ es la mínima topología que contiene a $\mathcal{B}$. De este modo, el conjunto de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ forma una base de la topología.

El hecho de trabajar con espacios topológicos que no verifican el I Axioma de Numerabilidad hace necesaria la generalización del concepto de sucesión al concepto de red. Dado un conjunto dirigido $\mathcal{I}$, es decir, un conjunto parcialmente ordenado tal que para cualesquiera $x, y \in \mathcal{I}$, existe $z \in \mathcal{I}$ tal que $x \leq z$ e $y \leq z$, una *red* es una aplicación $\mathcal{I} \to X : \ i \mapsto x_i$. Se dice que la red converge a un punto $x_0 \in X$, y se denota $\{x_i\} \to x_0$ si para todo entorno U de x_0 existe un elemento $a \in \mathcal{I}$ tal que $x_b \in U \ \forall b \geq a$. La noción de la caracterización de continuidad por sucesiones en espacios topológicos que verificasen el I Axioma de Numerabilidad se extiende con generalidad a todos los espacios topológicos en el caso de redes: una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para cada red $\{x_i\} \to x_0$, entonces $\{f(x_i)\} \to f(x_0)$.

Análogamente, la red $\{x_i\}$ se dice tener un punto de acumulación en x_0 si, dado un entorno U de x_0, para todo $a \in I$, existe $b \geq a$ tal que $x_b \in U$. Además, la compacidad también puede caracterizarse con el hecho de que toda red tenga un punto de acumulación. Una teoría algo más detallada sobre las redes topológicas puede verse en [7].

Por último, utilizaremos un resultado algo más conocido, pero cuya demostración en productos de infinitos espacios es más complicada.

Teorema 3.1. (Tychonoff) Dado un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y una colección de espacios topológicos compactos $\{K_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, el producto $\prod_{i \in \mathcal{I}} K_i$ es compacto.

En ciertas aplicaciones, también será necesario considerar la existencia de funciones de un espacio topológico en $\mathbb{R}$ que separan puntos. Para ello, necesitamos el lema de Urysohn, cuya demostración puede verse en [5].

Lema 3.1. (Urysohn) Un espacio topológico es normal si y sólo si para cuales quiera subconjuntos cerrados, no vacíos y disjuntos $A, B \subset X$, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Otro resultado de topología algo más avanzada que vamos a necesitar es el siguiente.

Teorema 3.2. (Baire) Si M es un espacio métrico completo y $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de abiertos densos, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso.

Por otro lado, también ha sido necesario dar como conocida la teoría básica de espacios de Banach: teoría de operadores continuos, su norma, relaciones de compacidad de la bola unidad, reflexividad, etc. Para algunos ejemplos, se han utilizado espacios de Banach conocidos sin definirlos explícitamente y sus relaciones de dualidad, como c_0, l_1 y l_∞.

Por último, comentar que en este trabajo se ha utilizado en multiples ocasiones el lema de Zorn, el cual es equivalente al axioma de elección, que se ha asumido como cierto.

Lema 3.2. (Zorn) Dado un conjunto parcialmente ordenado y no vacío, si toda cadena contiene una cota superior, entonces el conjunto original contiene al menos un elemento maximal.

4. Espacios Vectoriales Topológicos

Definición 4.1. Un *espacio vectorial topoógico* sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ es un espacio vectorial V dotado de una topología de manera que

- La aplicación $V \times V \to V : \ (x, y) \mapsto x + y$ es continua.

- La aplicación $\mathbb{F} \times V \to V : \ (\alpha, x) \mapsto \alpha x$ es continua con la topología usual de $\mathbb{K}$.

Definición 4.2. Una *seminorma* definida sobre un espacio vectorial V es una aplicación $p : V \to [0, \infty]$ que verifica que

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \ \forall x, y \in V$
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \ \forall x \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}$

Observación 4.1. Una norma es una seminorma que verifica la implicación $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ejemplo 4.1. Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas definidas en V. Podemos definir en V la mínima topología tal que toda seminorma $p \in \mathcal{P}$ es continua, es decir, esta topología tiene una subbase en los conjuntos

$$\{x \in V : p(x - x_0) < \epsilon\}, \quad x_0 \in V, \ \epsilon \in (0, \infty), \ p \in \mathcal{P}$$

En adelante, nos referiremos a esta topología como aquella generada por la familia de seminormas $\mathcal{P}$.

Definición 4.3. Un *espacio localmente convexo* (ELC) es un espacio vectorial topológico cuya topología está definida por una familia de seminormas $\mathcal{P}$ tal que

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x \in V : p(x) = 0\} = \{0\}$$

Observación 4.2. Todo espacio normado es un ELC. Podría darse el caso de que estos fuesen los únicos ELC y que la definición que acabamos de dar no generalice la noción de espacio normado. Sin embargo, veremos más adelante que si X es un espacio normado no separable, su espacio dual dotado de cierta topología, denominada débil-estrella, no es un espacio metrizable, pues su bola unidad tampoco lo es. Por tanto, X^*, con dicha topología, sería un ELC pero no normado.

Definición 4.4. Dado un espacio vectorial X, un subconjunto $K \subset X$ se dice *convexo* si

$$x, y \in K \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda) y \in K \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

Observación 4.3. Todo punto en un ELC tiene una base de entornos formada por conjuntos abiertos convexos, debido a que los elementos de la subbase son convexos por la subaditividad de las seminormas, ya que si $p(x) < \epsilon$ y $p(y) < \epsilon$, entonces

$$p(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda) p(y) < \epsilon \ \forall \lambda \in [0, 1]$$

La convexidad local se sigue de que la intersección de conjuntos convexos es convexa.

Proposición 4.1. Si A es un subconjunto convexo de un espacio vectorial topológico X, entonces $\overline{A}$ también es convexo.

Demostración. Sean $a, b \in \overline{A}$. Entonces, existen redes $\{x_i : i \in \mathcal{I}\} \subset A$ y $\{y_j : j \in \mathcal{J}\}$ tales que $x_i \to a$ e $y_j \to b$. Fijado $\lambda \in (0, 1)$, para cada $i \in \mathcal{I}$, se tiene por continuidad que $\{\lambda y_j + (1 - \lambda) x_i : j \in \mathcal{J}\} \to \lambda b + (1 - \lambda) x_i$, luego $[x_i, b] \in \overline{A}$. También por continuidad, $\{\lambda b + (1 - \lambda) x_i : i \in \mathcal{I}\} \to \lambda b + (1 - \lambda) a \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Como $a, b \in \overline{A}$ eran arbitrarios, $\overline{A}$ es convexo. □

Proposición 4.2. Todo *ELC* es Hausdorff.

Demostración. Por la definición de ELC, dados $x, y \in X$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $\epsilon = p(x - y) > 0$. Entonces, consideremos los siguientes abiertos disjuntos (por la desigualdad triangular)

$$U = \left\{z \in X : p(z - x) < \tfrac{\epsilon}{2}\right\}, \quad V = \left\{z \in X : p(z - y) < \tfrac{\epsilon}{2}\right\}$$

□

Definición 4.5. Un subconjunto V de un espacio vectorial X se dice *absorbente* si

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$$

Lema 4.1. En un espacio vectorial topológico X, todo entorno abierto del origen V es absorbente.

Demostración. Dado $x \in X$, la aplicación

$$\phi : \mathbb{K} \to X : \ \lambda \mapsto \lambda x$$

es continua, de modo que $\phi^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{K}$ que contiene a 0. Entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in \phi^{-1}(V)$. Por tanto, $\frac{1}{n}x \in V \Rightarrow x \in nV$. □

4.1. Teorema de Hahn-Banach

Antes de enfrentarnos al teorema de separación de Hahn-Banach, necesitamos desarrollar ligeramente una teoría sobre funcionales sublineales.

Definición 4.6. Dado un espacio vectorial X, una aplicación $p : V \to \mathbb{R}$ se dice *sublineal* si verifica las siguientes propiedades:

- Homogeneidad positiva: $p(\alpha x) = \alpha p(x)\ \forall \alpha \geq 0,\ \forall x \in X$
- Subaditividad: $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in X$

Al espacio de todos los funcionales sublineales $X \to \mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathcal{S}_X$.

Lema 4.2. Un funcional sublineal p definido en un espacio vectorial X es lineal si y sólo si $p(-x) = -p(x)\ \forall x \in X$.

Demostración. Claramente la linealidad implica la igualdad. Recíprocamente, suponemos que $p(-x) = -p(x)\ \forall x \in X$. Entonces, si $\alpha < 0$, se tiene que

$$p(\alpha x) = -p\left((-\alpha)x\right) = \alpha p(x)$$

Además,

$$p(x + y) = -p(-x - y) \geq -\left(p(-x) + p(-y)\right) = p(x) + p(y)$$

Y la otra desigualdad es precisamente la subaditividad de la definición de funcional sublineal. □

Lema 4.3. Sea X un espacio vectorial, sea $p \in \mathcal{S}_X$ y sea V un subespacio vectorial. Si $q \in \mathcal{S}_V$ verifica que $q \leq p|_V$, entonces existe $r \in \mathcal{S}_X$ tal que $r_V = q$ y $r \leq p$.

Demostración. Definimos

$$r(x) = \inf_{v \in V} \left(q(v) + p(x - v)\right)$$

Para ver que este ínfimo está bien definido (y es real), utilizamos en primer lugar la subaditividad en q

$$0 \leq q(v) + q(-v) \leq q(v) + p(-v)$$

Ahora, utilizando la subaditividad en p, tenemos que

$$p(-v) \leq p(-x) + p(x - v) \Rightarrow q(v) + p(x - v) \geq p(x - v) - p(-v) \geq -p(-x)$$

De modo que, fijado $x \in X$, el conjunto $\{q(v) + p(x - v) : v \in V\}$ tiene una cota inferior, luego $r(x)$ está bien definido.

Además, tomando $v = 0$, se ve que $r(x) \leq p(x)$. Por otro lado, si $x \in V$, entonces

$$q(v) + p(x - v) \geq q(v) + q(x - v) \geq q(x) \Rightarrow r(x) = q(x)$$

donde el ínfimo se alcanza al tomar $v = x$.

La homogeneidad positiva se ve, tomando $\alpha \geq 0$, como $w \in V \Leftrightarrow \alpha w \in V$, entonces

$$r(\alpha x) = \inf_{v \in V}(q(v) + p(\alpha x - v)) = \inf_{\alpha w \in V}(q(\alpha w) + p(\alpha(x - w))) = \alpha \inf_{w \in V}(q(w) + p(x - w)) = \alpha r(x)$$

Por último, para ver la subaditividad de r, dados $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$, tomamos $v, w \in V$ tales que

$$q(v) + p(x - v) < r(x) + \tfrac{\epsilon}{2}, \quad q(w) + p(y - w) < r(y) + \tfrac{\epsilon}{2}$$

Por la subaditividad de p y q,

$$r(x+y) \leq q(v+w) + p(x+y-(v+w)) \leq q(v) + q(w) + p(x-v) + p(y-w) < r(y) + r(y) + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se llega a la subaditividad de r. $\square$

Lema 4.4. Dado un espacio vectorial X, si $p \in \mathcal{S}_X$, entonces existe $q \in \mathcal{S}_X$, minimal en dicho conjunto, tal que $q \leq p$.

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{r \in S_X : r \leq p\}$ y sea $C = (r_i)_{i \in \mathcal{I}}$ una cadena en $\mathcal{P}$. Para cada $x \in X$, definimos

$$r(x) := \inf_{i \in \mathcal{I}} r_i(x)$$

En particular, como para cada $i \in \mathcal{I}$, la subaditividad implica que $0 \leq r_i(x) + r_i(-x)$. Entonces, sabemos que r está bien definida, es decir, que el ínfimo no toma el valor $-\infty$, puesto que

$$r_i(x) \geq -r_i(-x) \geq -p(-x) \Rightarrow r(x) \geq -p(-x)$$

Para ver la condición de subaditividad, dados $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$, podemos encontrar índices $i, j \in \mathcal{I}$ tales que

$$r_i(x) < r(x) + \tfrac{\epsilon}{2}, \quad r_j(y) < r(y) + \tfrac{\epsilon}{2}$$

Por la condición de cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $r_j \leq r_i$. Entonces:

$$r(x+y) \leq r_j(x+y) \leq r_j(x) + r_j(y) \leq r_i(x) + r_j(y) < r(x) + r(y) + \epsilon$$

Como esto es cierto para todo $\epsilon > 0$, se ve que r es subaditivo. Por último, es claro que la homogeneidad positiva se conserva al tomar ínfimos.

Como $p \in \mathcal{P}$, entonces $\mathcal{P} \neq \emptyset$ y el lema de Zorn implica que $\mathcal{P}$ contiene un elemento minimal. Evidentemente, este elemento también será minimal en $\mathcal{S}_X$. $\square$

Lema 4.5. Si $q \in \mathcal{S}_X$ es minimal, entonces q es lineal.

Demostración. Por el lema 4.2, únicamente hace falta ver que $q(-x) = -q(x)\ \forall x \in X$. Fijamos un $x \in E$ y tomemos $V = \mathbb{R}x$. En V, definimos el funcional lineal por

$$f(\alpha x) := \alpha q(x)$$

Entonces, si $\alpha \geq 0$, la homogeneidad positiva de q da que $f(\alpha x) = q(\alpha x)$. Si $\alpha \leq 0$, entonces, por la subaditividad de q tenemos que $0 \leq q(\alpha x) + q(-\alpha x)$ y, entonces,

$$f(\alpha x) = \alpha q(x) = -q(-\alpha x) \leq q(\alpha x)$$

Así, $f \leq q|_V$, luego el lema 4.3 nos da la existencia de un funcional sublineal $r \in \mathcal{S}_X$ tal que $r \leq q$ y $r|_V = f$. Por la minimalidad de q, se tiene que $r = q$, luego

$$q(x) = f(x) = -f(-x) = -r(-x) = -q(-x)$$

Como $x \in X$ era arbitrario, q es lineal por el lema 4.2. $\square$

Ahora, estamos en disposición de probar los teoremas de extensión de Hahn-Banach.

Teorema 4.1. (Extensión de Hahn-Banach) Sea X un espacio vectorial real y sea p un funcional sublineal en X. Si V es un subespacio de X y f es un funcional lineal en V tal que

$$f(x) \leq p(x)\ \forall x \in V$$

Entonces, existe una extensión $\hat{f} : E \to \mathbb{R}$ tal que f es lineal y satisface que

$$\hat{f}(x) \leq p(x)\ \forall x \in E$$

Demostración. Por el lema 4.3, existe un sublineal $r \leq p$ que extiende a f. Por el lema 4.4, existe un funcional sublineal minimal $\hat{f}$, tal que $\hat{f} \leq r$, que será lineal por el lema 4.5. Entonces, $\hat{f}(x) \leq f(x)\ \forall x \in V$. Sin embargo, como ambos son lineales

$$f(x) = -f(-x) \leq -\hat{f}(-x) = \hat{f}(x)$$

Por tanto, $f = \hat{f}|_V$. □

Corolario 4.1. Sea X un espacio normado real y sea V un subespacio de X. Si $f \in V^*$, existe una extensión $\hat{f} \in X^*$ tal que $f = \hat{f}|_V$ y $\|\hat{f}\| = \|f\|$

Demostración. La construcción de $\hat{f}$ se debe al teorema 4.1 con $p(x) = \|f\|\|x\|$. Como $\hat{f} \leq p$, entonces $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$. La igualdad se da porque $f = \hat{f}|_V$. □

Corolario 4.2. Sea X un espacio normado complejo y sea V un subespacio de X. Si $f \in V^*$, existe una extensión $\hat{f} \in X^*$ tal que $f = \hat{f}|_V$ y $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

Demostración. Sea $f_0 := \Re(f)$. Entonces, $|f_0(v)| \leq |f(v)| \leq \|f\|\|v\|\ \forall v \in V$. Por el corolario 4.1, podemos extender f_0 a un funcional $\mathbb{R}$-lineal $\hat{f}_0$. Entonces,el funcional que buscamos es

$$\hat{f}(x) := \hat{f}_0(x) - i\hat{f}_0(ix)$$

□

Corolario 4.3. Sea X un espacio normado. La inclusión $j : X \to X^{**} :\ x \mapsto j(x)$, donde $j(x)(x^*) := x^*(x)$, es una isometría.

Demostración. Para cada $x \in X$ y $x^* \in \mathcal{B}(X^*)$, $|j(x)(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x\|$, de modo que $\|j(x)\| \leq \|x\|$. Por los corolarios 4.1 y 4.2, podemos construir un $x^* \in \mathcal{B}(X^*)$ tal que $x^*(x) = \|x\|$ (extendiendo el funcional $\alpha x \mapsto \alpha\|x\|$). Por tanto, $\|x\| = |x^*(x)| = |j(x)(x^*)| \leq \|j(x)\|$. □

Lema 4.6. Sea X un espacio vectorial topológico sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ es continuo si y sólo si existe un entorno de cero V tal que $f(V)$ está acotado en $\mathbb{K}$.

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es continua. Si $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ es la bola unidad en $\mathbb{K}$, entonces $f^{-1}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}(\mathbb{K})))$ es un entorno abierto del origen tal que $f(f^{-1}(\mathrm{Int}(\mathcal{B}(\mathbb{K})))) \subset \mathcal{B}(\mathbb{K})$ es un conjunto acotado en $\mathbb{K}$.

Reciprocamente, sea V un entorno del origen tal que $f(V)$ está acotado por cierta constante $M > 0$. Entonces, $f\left(\frac{\epsilon}{M}V\right) \subset \epsilon\mathcal{B}(\mathbb{K})$ y la continuidad de f en cero se sigue de que $\frac{\epsilon}{M}V$ es un entorno del origen porque la multiplicación por cualquier escalar no nulo es un homeomorfismo del espacio vectorial topológico en sí mismo. La continuidad en el resto de puntos se sigue trivialmente de la linealidad en f. □

Teorema 4.2. (Teorema de Separación de Hahn-Banach, caso real) Sea X un espacio vectorial real, topológico y locálmente convexo. Sea K conjunto cerrado, no vacío y convexo de X Si $x_0 \in X \setminus K$, entonces existe un funcional lineal $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) > \sup_{x \in K} f(x)$$

Demostración. Si pérdida de generalidad, podemos asumir que $0 \in K$ (haciendo una traslación). Como K es cerrado, existe un entorno abierto N de x_0 tal que $N \cap K = \emptyset$. La condición de convexidad local da la existencia de un subentorno convexo del origen $\widetilde{W} \subset (N - x_0)$. Sustituyendo $\widetilde{W}$ por $W = \widetilde{W} \cap (-\widetilde{W})$, podemos suponer que $W = -W$, sin perderse la propiedad de convexidad. Se tiene que $(x_0 + W) \cap K = \emptyset$ o, equivalentemente, $x_0 \notin K + W$.

Definamos ahora $V := K + \frac{1}{2}W$. Entonces, V es un entorno convexo del cero. Definimos también la función

$$p : X \to \mathbb{R} :\ x \mapsto \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda V\}$$

que está bien definida por ser V absorbente, por el lema 4.1. Veamos que p es sublineal. La homogeneidad positiva se deduce directamente: tomamos $x \in X$ y $\alpha \geq 0$. Entonces,

$$p(\alpha x) = \text{ínf}\,\{\lambda > 0 : \alpha x \in \lambda V\} = \alpha\,\text{ínf}\left\{\frac{\lambda}{a} > 0 : x \in \frac{\lambda}{\alpha} V\right\} = \alpha p(x)$$

En cuanto a la subaditividad, dados $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Sean $\lambda, \mu \in (0, \infty)$ tales que

$$p(x) < \lambda < p(x) + \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad p(y) < \mu < p(y) + \tfrac{\epsilon}{2}$$

Por definición, existen $\alpha > \lambda^{-1}$ y $\beta > \mu^{-1}$ tales que $\alpha x, \beta y \in V$. Como también $0 \in V$ y V es convexo, se tiene que $\frac{x}{\lambda} \in V$ y que $\frac{y}{\mu} \in V$. De nuevo, por la convexidad de V:

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{y}{\mu}\right) \in V$$

Por tanto, de la definición de p se tiene que

$$p(x+y) \leq \lambda + \mu < p(x) + p(y) + \epsilon$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se tiene la subaditividad de p.

Por definición, $p(x) \leq 1$ para todo $x \in V$. Veamos que $p(x_0) > 1$. Por reducción al absurdo, si $p(x_0) \leq 1$, entonces la convexidad de V, junto con el hecho de que $0 \in V$, implica que $\frac{x_0}{\lambda} \in V$ para todo $\lambda > p(x_0)$ y, en particular, para todo $\lambda > 1$. En concreto, haciendo tender $\lambda \to 1$ vemos que $x_0 \in \overline{V}$, de modo que $\left(x_0 + \frac{1}{2}W\right) \cap V \neq \emptyset$. Entonces, como W es convexo y $W = -W$, entonces $\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W \subset W$, luego

$$x_0 \in \left(K + \frac{1}{2}W\right) - \frac{1}{2}W = K + \left(\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W\right) \subset K + W \#$$

Tomamos el subespacio $Y = \mathbb{R}x_0$ y el funcional $g : Y \to \mathbb{R} : \alpha x_0 \mapsto \alpha p(x_0)$. Entonces, si $\alpha \geq 0$, la homogeneidad positiva de p implica que $g(\alpha x_0) = p(\alpha x_0)$. Si $\alpha \leq 0$, entonces por la subaditividad de p tenemos que $0 \leq p(\alpha x) + p(-\alpha x)$ y, entonces,

$$p(\alpha x) \geq -p(-\alpha x) = -g(-\alpha x) = g(\alpha x)$$

Por tanto $g \leq p|_Y$. Por el teorema 4.1, existe un funcional lineal $f \leq p$ tal que $f|_Y = g$. En particular, $f(x_0) = g(x_0) = p(x_0) > 1$. Entonces,

$$\sup_{y \in K} f(y) \leq 1 < f(x_0)$$

Veamos la continuidad de f. Como $0 \in K$, entonces $\frac{1}{2}W \subset K + \frac{1}{2}W = V$. Sin embargo, $f(x) \leq p(x) \leq 1\ \forall x \in V$, luego $f(x) \leq 1\ \forall x \in \frac{1}{2}W$. Como $\frac{1}{2}W = -\frac{1}{2}W$, entonces si $x \in \frac{1}{2}W$, $f(x) = -f(-x) \geq -1$, luego $|f(x)| \leq 1\ \forall x \in \frac{1}{2}W$. Así, por el lema 4.6, f es continua.

□

Corolario 4.4. Sea X un espacio vectorial topológico, complejo y localmente convexo y sea K un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de X. Si $x_0 \notin K$, existe un funcional lineal y continuo $f : X \to \mathbb{C}$ tal que

$$\Re(f(x_0)) > \sup_{x \in K} \Re(f(x))$$

Demostración. Ignorando la multiplicación por números complejos, podemos considerar X como un espacio vectorial real. Entonces, el teorema 4.2 da la existencia de un funcional $\mathbb{R}$-linear tal que

$$g(x_0) > \sup_{x \in K} g(x)$$

Entonces, el funcional $\mathbb{C}$-lineal buscado es

$$f(x) := g(x) - ig(ix)$$

□

5. Topologías Débiles

Dado un espacio vectorial topológico X, denotaremos como su *espacio dual* X^* al conjunto de los funcionales lineales continuos $X \to \mathbb{K}$.

Definición 5.1. Dado un espacio vectorial topológico X, la *topología débil*, denotada por db, es la topología definida por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ donde

$$p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$$

La *topología débil-estrella*, denotada por db^*, se define en X^* como la topología generada por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_x : x \in X\}$, donde

$$p_x(x^*) = |x^*(x)|$$

Observación 5.1. La topología débil define un ELC puesto que para cada $x \in X \setminus \{0\}$, el teorema de extensión de Hahn-Banach 4.1 garantiza la existencia de un $x^* \in X$ tal que $x^*(x) \neq 0$. Es más claro todavía que la topología débil-estrella define un ELC porque para cada $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tiene que haber un $x \in X$ tal que $x^*(x) \neq 0$.

Observación 5.2. La topología débil es la mínima topología tal que todos los funcionales de X^* son continuos. En particular, es una topología más débil que la topología original del espacio vectorial topológico X.

Análogamente, la topología débil-estrella es la mínima topología tales que los funcionales $x^* \mapsto x^*(x)$, donde $x \in X$ es cierto elemento fijado, son continuos. En X^* también está definida la topología débil, que es la mínima topología tal que todos los funcionales del espacio bidual X^{**} son continuos. Como tenemos una inclusión

$$j : X \to X^{**} : x \mapsto j(x),\ j(x)(x^*) = x^*(x)$$

Entonces el conjunto de los funcionales que definen la topología débil-estrella está contenido en el conjunto de funcionales que definen la topología débil, luego la topología débil es más fina que la topología débil-estrella.

Proposición 5.1. Una sucesión (x_n) contenida en un espacio vectorial topológico X converge con la topología débil a $x \in X$, si y solo si

$$x^*(x_n) \to x^*(x)\ \forall x^* \in X^*$$

Análogamente, una sucesión $(x_n^*) \subset X^*$ converge a $x^* \in X^*$ con la topología débil-estrella si y sólo si

$$x_n^*(x) \to x^*(x)\ \forall x \in X$$

Demostración. Una implicación es clara por la continuidad de los elementos del dual. Para el recíproco, si x_n no convergiese a x con la topología débil, entonces existiría un entorno abierto subbásico de x, es decir, un conjunto de la foma $\{y \in X : |x_0^*(y - x)| < \epsilon\}$ que no contiene a infinitos términos de la sucesión. De este modo, $x_0^*(x_n)$ no convergería a $x_0^*(x)$.

La afirmación con respecto a la topología débil-estrella es análoga. □

Ejemplo 5.1. Las topologías original, débil y débil estrella verifican ciertas relaciones de contenido, que vamos a ver que pueden ser estrictas. Consideremos el espacio de Banach c_0, luyo dual es $c_0^* = l_1$ y cuyo bidual es $c_0^{**} = l_1^* = l_\infty$. En l_1 consideremos la sucesión $\{e_i\}$ formada por las sucesiones que tienen un 1 en la i-ésima coordenada y todas las demás cero. Entonces, sea $a \equiv (a_n) \in c_0$. Entonces, $e_i(a) = a_i \to 0$. Por tanto, $\{e_i\}$ tiende a cero con la topología débil-estrella, por la proposición 5.1. Sin embargo, si consideramos en l_∞ la sucesión b que tiene un 1 en cada coordenada, tenemos que $b(e_i) \to 1$, luego $\{e_i\}$ no tiende a cero con la topología débil. Claramente, tampoco lo hace con la topología de la norma de l_1.

Ejemplo 5.2. Para ver que la convergencia débil no implica la convergencia en norma. Considerese la sucesión $\{e_i\} \subset l_2$, donde e_i es la sucesión que tiene un 1 en su i-ésima coordenada y un cero en el resto. Como l_2 es un espacio de Hilbert, es su propio dual, luego dado $a \equiv (a_i) \in l_2$, entonces $a(e_i) = a_i \to 0$. Por tanto, $\{e_i\}$ converge a cero en la topología débil, pero no lo hace en la topología de la norma.

Veamos ahora que los espacios duales de un ELC dotado, bien de la topología débil o bien de la topología débil-estrella son los que esperamos que sean.

Teorema 5.1. Si X es un ELC, entonces $(X, db)^* = X^*$

Demostración. Por la observación 5.2, todo funcional del dual es continuo con la topología débil, luego $X^* \subset (X, db)^*$. Recíprocamente, como la topología débil es la mínima topología tal que todo funcional del dual es continuo (y estos eran continuos en la topología original), todo abierto de la topología débil es abierto en la topología original. Caracterizando la continuidad por imágenes inversas de abiertos, se ve que todo funcional lineal continuo con la topología débil lo es con la original, de modo que $(X, db)^* \subset X^*$. □

Teorema 5.2. Si X es un ELC, entonces $(X^*, db^*)^* = X$

Demostración. Claramente, si $x \in X$, el funcional $j(x)(x^*) := x^*(x)$ es continuo con la topología débil-estrella, por definición. Entonces $X \subset (X^*, db^*)^*$. Recíprocamente, si $f : X^* \to \mathbb{K}$ es continuo con la topología débil-estrella, entonces $f^{-1}(\text{Int}(\mathcal{B}(\mathbb{K})))$ es un entorno abierto del origen, de modo que contiene un entorno abierto básico de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{x^* \in X^* : |x^*(x_n)| \leq \epsilon\}$$

para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in X$ y cierto $\epsilon > 0$ [1]. Definimos la aplicación

$$T : X^* \to \mathbb{K}^n : x^* \mapsto (x^*(x_1), \ldots, x^*(x_n))$$

Si $x^* \in \ker(T)$ entonces la linealidad implica que $x^*(\lambda x_j) = \lambda x^*(x_j) = 0 \; \forall \lambda \in \mathbb{K}$, luego $|f(\lambda x^*)| \leq 1 \; \forall \lambda \in \mathbb{K}$. Así, la única posibilidad es que $x^* \in \ker(f)$. En otras palabras,

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(x_i) \subset \ker(f)$$

Entonces, podemos considerar $x_1, \ldots, x_n, f$ como elementos del espacio dual $(X^*/I)^*$. El espacio vectorial X^*/I es de dimensión finita (menor o igual que n) y entonces los funcionales cocientes inducidos de $x_1, \ldots, x_n$ tienen nucleos que intersecan en el cero, es decir, el anulador del espacio que generan es el cero. Por tanto, $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ generan $(X^*/I)^*$, luego existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (no necesariamente únicos) tales que

$$\overline{f} = \alpha_1 \overline{x_1} + \cdots + \alpha_n \overline{x_n} \Rightarrow f = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \Rightarrow f \in X$$

Por tanto, $(X, db^*)^* = X$. □

Teorema 5.3. (Mazur) Dado un ELC X, un subconjunto convexo es cerrado si y sólo si lo es con la topología débil.

Demostración. Claramente, si es cerrado con la topología débil también lo es con la topología original porque la primera es menos fina. Para el recíproco, supongamos que $K = \overline{K}$ (cierre en la topología original) y que existe $x_0 \in \overline{K}^{(db)} \setminus K$ (cierre de K en la topología débil). Por el teorema de Hanh-Banach 4.2, y el corolario 4.4 aplicados a la topología original, existe $x^* \in X^*$ tal que

$$\Re(x^*(x_0)) > \sup\{\Re(x^*(x)) : x \in K\} =: M$$

Sin embargo, x^* es continua con la topología débil por el teorema 5.1, de modo que $(x^*)^{-1}(-\infty, M]$ es un cerrado (con la topología débil) que contiene a K pero no a x_0, lo que contradice el hecho de que $x_0 \in \overline{K}^{(db)}$. □

Proposición 5.2. Dado un espacio de Banach X, y un subespacio $V \subset X$, entonces la topología débil en V es la restricción como subespacio de la topología débil de X.

Demostración. Se sigue como consecuencia de los corolarios 4.1 y 4.2, puesto que los funcionales de V^* son la restricción a V de los funcionales de X. □

[1] Podemos suponer que todas las cotas son ϵ después de multiplicar por ciertas constantes

6. Propiedades de $\mathcal{B}(X^*)$ con la topología débil-estrella

6.1. Teorema de Alaoglu y reflexividad

Teorema 6.1. Dado un espacio normado X sobre $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, la bola unidad de X^*, definida como $\mathcal{B}(X^*) = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ es compacta con la topología débil-estrella.

Demostración. Definimos el espacio topológico $D := \prod_{x \in \mathcal{B}(X)} \mathbb{K}$ y la aplicación:

$$\tau : \mathcal{B}(X^*) \to D,\ x^* \mapsto \{x^*(x)\}$$

Queremos ver que τ es un homeomorfismo sobre su imágen. En primer lugar, τ es inyectiva puesto que si $\tau(x_1^*) = \tau(x_2^*)$ para ciertos $x_1^*, x_2^* \in \mathcal{B}(X^*)$, entonces $x_1^*(x) = x_2^*(x)\ \forall x \in \mathcal{B}(X)$. Entonces x_1^* y x_2^* coinciden en su restricción a $\mathcal{B}(X)$ y, por linealidad, $x_1^* = x_2^*$.

La continuidad de τ es equivalente a la continuidad de todas las funciones $\pi \circ \tau$, cuando π recorre las proyecciones sobre cada una de las coordenadas $x \in \mathcal{B}(X)$. Estas funciones no son otra cosa que las funciones que definen la topología débil-estrella, luego son continuas. Además, la topología débil-estrella de $\mathcal{B}(X^*)$ es la topología más débil tal que τ es continua, puesto que añadir, en el proceso de construcción de esta topología, los elementos de norma mayor que 1 no afecta a la topología resultante. Por tanto, un conjunto $U \subset \mathcal{B}(X^*)$ es débil-estrella abierto si y sólo si existe un abierto $V \subset D$ tal que $U = \tau^{-1}(V)$. Así, $\tau(U) = V \cap \tau(\mathcal{B}(X^*))$ es un abierto de $\tau(\mathcal{B}(X^*))$ con la topología heredada como subespacio. Entonces, τ es una aplicación abierta si reducimos el espacio de llegada y, por tanto, un homeomorfismo sobre su imagen.

Por último queremos ver que τ es compacto. Para ello, expresamos los elementos de D como aplicaciones $f : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{K}$ y consideramos la igualdad

$$\tau(\mathcal{B}(X^*)) = \bigcap_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathcal{B}(X)} \{f \in D : f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\} \cap \prod_{x \in \mathcal{B}(X)} \|x\| \mathcal{B}(\mathbb{K}) \quad [2]$$

La igualdad se da porque la primera intersección garantiza que $x^* \in \mathcal{B}(X^*)$ sea lineal, mientras que el último conjunto garantiza que x sea acotado. Este último conjunto es compacto por el teorema de Tychonoff 3.1. Entonces, $\tau(\mathcal{B}(X^*))$ es un cerrado en un compacto, luego es compacto. Como τ era un homeomorfismo sobre la imagen, $\mathcal{B}(X^*)$ es compacto. □

Corolario 6.1. Dado un espacio de Banach X, todo subconjunto de X^* cerrado con la topología débil-estrella y acotado es compacto con dicha topología.

Demostración. Sea $r > 0$. Como X^* con la topología débil-estrella es un espacio vectorial topológico, $r\mathcal{B}(X)$ es homeomorfa a $\mathcal{B}(X)$, luego es compacta por el teorema 6.1. Así todo subconjunto cerrado y acotado es un cerrado de un compacto, luego ha de ser compacto. □

La compacidad de la bola unidad es una consecuencia de reducir la topología: al reducir la topología, limitamos el conjunto de recubrimientos por abiertos de la bola unidad $\mathcal{B}(X^*)$, hasta que solo admitamos recubrimientos que contengan un recubrimiento finito. [3]

De hecho, la compacidad de la bola unidad es una propiedad que aparecía en los espacios de Banach si y sólo si su dimensión era finita. En efecto, si tenemos un espacio de Banach de dimensión infinita X, construimos una sucesión en $\mathcal{B}(X)$ como sigue. Supongamos construidos los primeros términos $x_1, \ldots, x_n$ tales que son linealmente independientes y $d(x_i, \mathbb{K}x_1 + \cdots \mathbb{K}x_{i-1}) \geq 1\ \forall i = 1, \ldots, n$. Entonces, sea M_n el subespacio generado por los primeros n elementos. Tomamos $z_{n+1} \in \mathcal{B}(X) \setminus M_n$. Como M_n es cerrado por ser completo, $d(z_{n+1}, M_n) > 0$ y no es muy difícil ver que existe $y_n \in M_n$ tal que $d(z_{n+1}, M_n) = \|z_{n+1} - y_n\|$. Definiendo $x_{n+1} := \frac{z_{n+1} - y_n}{\|z_{n+1} - y_n\|}$, hemos construido una sucesión $(x_n) \subset \mathcal{B}(X)$ tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos de la sucesión es mayor o igual que 1. Por tanto, esta sucesión no puede tener ninguna subsucesión convergente, luego $\mathcal{B}(X)$ no es compacto.

La compacidad tampoco se tiene que alcanzar con la topología débil, aunque sí puede hacerlo, puesto que si un espacio es reflexivo, las topologías débil y débil-estrella coinciden. La no compacidad de la bola unidad $\mathcal{B}(X)$ con la topología débil puede verse en el siguiente ejemplo.

[2] En la primera intersección, si en cierto conjunto se verificase que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \notin \mathcal{B}(X)$, consideraríamos el conjunto como el total.

[3] Nótese que, en el estudio de la compacidad, la topología sólo afecta cuando determinamos si un recubrimiento original es válido o no, según si esté formado o no por conjuntos abiertos, pero en el hecho de que un recubrimiento dado admita un subrecubrimiento finito, sólo afectan las propiedades de teoría de conjuntos.

Ejemplo 6.1. En l_1, considerese la sucesión $\{e_i\} \subset l_1$. Veamos que esta sucesión no contiene ningún punto de acumulación. Por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto de acumulación $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1$. Todo elemememento del dual $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$ es continuo, luego $a(e_i) = a_i$ tiene que tener un punto de acumulación en $a(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n$.

Si consideramos $a = e_i$, se tiene que $a_i \to 0$, luego $a(\omega) = \omega_i = 0$. Sin embargo, si consideramos, la sucesión a con un 1 en cada entrada, entonces la sucesión $\{a_n\}$ no tiene un punto de acumulación en $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n = 0$.

Si X es un espacio de Banach reflexivo, es claro que su topología débil coincide con la restricción de la topología débil-estrella, mediante el homeomorfismo $j : X \to j(X) \subset X^{**}$. Por tanto, el teorema 6.1 nos dice que $\mathcal{B}(X)$ es compacta con la topología débil. El recíproco también es cierto, y puede deducirse como una consecuencia del teorema de Goldstein.

Teorema 6.2. (Goldstein) Si X es un espacio de Banach, entonces $B(X)$ es denso en $\mathcal{B}(X^{**})$, con la topología débil-estrella.

Demostración. Sea $j : X \to X^{**}$ la inclusión isométrica en el espacio bidual. Queremos probar que $\overline{j(\mathcal{B}(X))}^{(db^*)} = \mathcal{B}(X^{**})$. Por la proposición 4.2 y el teorema 6.1, $\mathcal{B}(X^{**})$ es cerrado con la topología débil-estrella, luego $\overline{j(\mathcal{B}(X))}^{(db^*)} \subset \mathcal{B}(X^{**})$.

Para el recíproco, sea $y \in X^{**} \setminus \overline{j(\mathcal{B}(X))}^{(db^*)}$. Por el teorema 4.2 y el corolario 4.4, existe un funcional continuo con la topología débil-estrella tal que

$$\Re(f(y)) > \sup\left\{\Re(f(x^{**})) : x^{**} \in \overline{j(\mathcal{B}(X))}^{(db^*)}\right\}$$

Por el teorema 5.2, existe $x^* \in X^*$ tal que $f(x^{**}) = x^{**}(x^*)\ \forall x^{**} \in X^{**}$. En particular,

$$\Re(y(x^*)) > \sup\left\{\Re(x^{**}(x^*)) : x^{**} \in \overline{j(\mathcal{B}(X))}^{(db^*)}\right\} \geq \sup\{\Re(x^*(x)) : x \in \mathcal{B}(X)\} = \|x^*\|^4$$

Esto implica que $\|y\| > 1$, luego $y \notin \mathcal{B}(X^{**})$. □

Teorema 6.3. Un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si la bola unidad $\mathcal{B}(X)$ es compacta con la topología débil.

Demostración. Si $\mathcal{B}(X)$ es compacta, puesto que la topología débil de X es la restricción de la topología débil-estrella de X^{**} mediante la inclusión canónica $j : X \to X^{**}$, $j(\mathcal{B}(X))$ es compacta con la topología débil-estrella de X^{**}, luego es cerrada por la proposición 4.2. Por el teorema de Goldstein 6.2, $j(\mathcal{B}(X)) = \mathcal{B}(X^{**})$. Por linealidad, $j(X) = X^{**}$, luego X es reflexivo. □

6.2. Separabilidad y metrizabilidad

Existe una equivalencia interesante entre la separabilidad de un espacio y la metrizabilidad de la bola unidad de su espacio dual con la topología débil-estrella. Esta equivalencia será utilizada posteriormete para caracterizar los conjuntos compactos de la topología débil.

Lema 6.1. Sea X un espacio normado y sea F un subconjunto numerable. Entonces, el subespacio $\overline{\mathrm{Span}(F)}$ es separable.

Demostración. Puede considerarse el conjunto numerable

$$A = \{q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s : \ s \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q},\ f \in F\}^5$$

Veamos que es denso. Para ello, sea V un abierto de $\overline{\mathrm{Span}(F)}$. Como $V \cap \mathrm{Span}(F) \neq \emptyset$, fijamos un x_0 en este conjunto y tomamos un $\epsilon > 0$ tal que la bola de radio ϵ y centro x_0 esté contenida en V. Entonces, x_0, por estar en $\mathrm{Span}(F)$ tiene una expresión, de la forma

$$x_0 = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_r f_r,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}, f_1, \ldots, f_r \in F \setminus \{0\}$$

[4] Técnicamente, la definición de la norma de un funcional se hace con el módulo y no con la parte real. Sin embargo, multiplicando el x por una constante adecuada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$, se puede conseguir recuperar la norma como el supremo de las partes reales.

[5] Si el espacio vectorial es complejo, tomamos los racionales complejos, es decir, los números de la forma $x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{Q}$. En cualquier caso, lo denotamos indistintamente.

Para cada $i = 1, \ldots, r$, tomamos $a_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_i - \alpha_i| < \frac{\epsilon}{\|f_i\| r}$. Denotando $\tilde{x_0} = a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r$, tenemos que

$$\|\tilde{x_0} - x_0\| \leq |a_1 - \alpha_1| \|f_1\| + \cdots + |a_r - \alpha_r| \|f_r\| < \epsilon$$

Por tanto, $\tilde{x}_0 \in A \cap V$, luego A es denso y, por tanto, $\overline{\mathrm{Span}(F)}$ es separable. $\square$

Teorema 6.4. Sea X un espacio normado y sea $A \subset X$ un subconjunto compacto con la topología débil. Si X^* contiene un subconjunto numerable $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(x_n^*) = \{0\}$$

entonces la topología débil es metrizable en A.

Demostración. En el conjunto numerable mencionado, los elementos x_n^* son continuos con la topología débil. Entonces, fijado $n \in \mathbb{N}$, $x_n^*(A)$ es un conjunto compacto en $\mathbb{K}$. Multiplicando por una constante adecuada, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $|x_n^*(a)| \leq 1 \ \forall a \in A$. Definimos la distancia en A como

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} |x_n^*(x-y)| \ \forall x, y \in A$$

Claramente, la función distancia es simétrica, $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x, y \in A$. Además, $d(x,x) = 0 \ \forall x \in A$ y si $d(x,y) = 0$, entonces $x - y \in \ker(x_n^*) \ \forall n \in \mathbb{N}$, luego $x = y$ por la hipótesis del teorema. Además, la desigualdad triagular se verifica puesto que:

$$d(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} |x_n^*(x-z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} \left(|x_n^*(x-y)| + |x_n^*(y-z)| \right) = d(x,y) + d(y,z)$$

Para ver que esta distancia induce la misma topología que la topología débil, tenemos que ver que la aplicación identidad $(X, db) \to (X, d)$ es un homeomorfismo. Veamos, en primer lugar, que es continua. Para ello, sea $x_0 \in A$ y $\epsilon > 0$.

Por el axioma de Arquímedes, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\epsilon}{2} > \frac{1}{2^N}$ Así, como $|x_n^*(x)| \leq 1 \ \forall x \in A$, tenemos que

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n-1} x_n^*(x - x_0) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n-1} |x_n^*(x) - x_n^*(x_0)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{2} \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Si consideramos el conjunto débilmente abierto

$$V = \{x \in X : |x_n^*(x - x_0)| < \epsilon \ \forall n = 1, \ldots, N\}$$

Tenemos que

$$d(x, x_0) = \sum_{n=1}^{N} |x_n^*(x - x_0)| + \sum_{N+1}^{\infty} |x_n^*(x - x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \ \forall x \in V$$

De este modo, $x_0 \in V \subset \{x \in A : d(x, x_0) < \epsilon\}$, luego la función identidad $(X, db) \to (X, d)$ es continua. Además, como A es compacto con la topología débil y todo espacio métrico es Hausdorff, la aplicación es cerrada, porque todo cerrado del compacto es compacto y, por continuidad, su imagen es un compacto, que es cerrado por ser el espacio de llegada Hausdorff. Por tanto, esta aplicación identidad es un homeomorfismo y ambas topologías coinciden. $\square$

Corolario 6.2. Sea X un espacio normado separable y sea $A \subset X$ un subconjunto compacto con la topología débil. Entonces, dicha topología débil es metrizable en A.

Demostración. Como X es separable, el subespacio abierto $X \setminus \{0\}$ también lo es. Entonces, la aplicación

$$X \setminus \{0\} \to \{x \in X : \|x\| = 1\} : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

es continua y suprayectiva. Como la imagen continua de un espacio separable también lo es, la esfera unidad de X contiene un elemento separable. Sea entonces $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{x \in X : \|x\| = 1\}$ un conjunto numerable y denso de la esfera unidad. Por el teorema de extensión de Hahn-Banach 4.1, existen funcionales $x'_n \in X'$ tales que

$$x'_n(x_n) = \|x'_n\| = 1$$

Así, si $x \in X \setminus 0$, sea $y = \frac{x}{\|x\|}$. Por la densidad de $\{x_n\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{n_0} - y\| < \frac{1}{2}$. Así,

$$\|x'_{n_0}(y)\| = \|x'_{n_0}(x_{n_0}) - x'_{n_0}(x_{n_0} - y)\| \geq \|x'_{n_0}(x_{n_0})\| - \|x_{n'_0}\|\|x_{n_0} - y\| > \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow x'_{n_0}(y) \neq 0 \Rightarrow x'_{n_0}(x) \neq 0$$

Entonces, $\{x'_n : n \in \mathbb{N}\}$ verifica las condiciones del teorema 6.4 y A es metrizable con la topología débil. □

Corolario 6.3. Sea X un espacio normado y sea $A \subset X^*$ un conjunto compacto con la topología débil-estrella. Si X contiene un conjunto numerable $\{x_n\}$ con la propiedad de que, considerándolos como elementos del bidual,

$$A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker(x_n) = \{0\}$$

entonces A es metrizable con la topología débil-estrella.

Demostración. De nuevo, podemos suponer que, fijado $n \in \mathbb{N}$, $|a^*(x_n)| \leq 1 \ \forall a \in A$. Entonces, una demostración análoga a la del teorema 6.4 muestra que la topología débil-estrella es metrizable con la distancia

$$d(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-1} |(x^* - y^*)(x_n)|$$

□

Corolario 6.4. Sea X un espacio normado separable y sea $A \subset X^*$ un subconjunto compacto con la topología débil-estrella. Entonces A es metrizable con dicha topología.

Demostración. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso y numerable. Entonces, por continuidad de los elementos de A, se tiene que $a^*(d) = 0 \ \forall d \in D \Rightarrow a^* = 0$. Por el corolario 6.3, A es metrizable □

Corolario 6.5. Si X es separable, entonces $\mathcal{B}(X^*)$ es metrizable con la topología débil-estrella.

Demostración. Por el teorema 6.1, $\mathcal{B}(X^*)$ es compacta y, por el 6.4, es metrizable. □

El recíproco de este último resultado también es cierto.

Teorema 6.5. Dado un espacio normado X, si $\mathcal{B}(X^*)$ es un espacio metrizable con la topología débil-estrella, entonces X es separable.

Demostración. Si $\mathcal{B}(X^*)$ es metrizable con la topología débil-estrella, entonces es Hausdorff y I Axioma de Numerabilidad, de modo que existen conjuntos abiertos U_n tales que $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. A partir de la definición de topología débil-estrella, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $F_n \subset X$ tal que existe un abierto de la base de la topología contenido en U_n de la forma:

$$\{x^* \in \mathcal{B}(X^*) : |x^*(x)| \leq 1 \ \forall x \in F_n\} \subset U_n$$ [6]

Así, $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ es como mucho numerable. Entonces, si $x^*(f) = 0 \ \forall f \in F$, entonces, $x^* \in U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $x^* = 0$. Supongamos que existe $x \in X \setminus \overline{Span(F)}$. Entonces, existe un funcional en $\overline{\text{Span}(F)} \oplus \mathbb{K}x$ que se anula en $\overline{\text{Span}(X)}$ y toma el valor 1 en x. Este funcional es acotado, con norma $\left(d(x, \overline{\text{Span}(F)})\right)^{-1}$.

[6] En la definición de topología débil, aparecen ciertos ϵ que pueden ser sustituidos por 1 si multiplicamos los valores de F_n por una constante adecuada,

Por el teorema de Hahn-Banach 4.1, se puede extender a otro funcional acotado $x^* \in X^*$. Así, existe $x^* \in X$ tal que $x^* \in X^*$ tal que $x(F) = 0$ y $x^*(x) = 1$, en contradicción con lo que se ha comentado justo antes.

Así, $X = \overline{\text{Span}(F)}$ y, por el lema 6.1, X es separable. $\square$

Veamos ahora algunas aplicaciones de estos resultados.

Corolario 6.6. (Principio de Selección de Helly) Si $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones crecientes acotadas por cierta constante común $M > 0$, entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) que converge puntualmente a cierta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $X = \mathbb{R}^{|\mathbb{R}|}$, a cuyos elementos denotamos denotamos como $\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$, dotado de la norma:

$$\|x\| := \sup\{x_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Su espacio dual son las funciones acotadas, con la norma infinito, entendiendolas como los valores que toman en cierta base $\{e_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Por el teorema 6.1, $M\mathcal{B}(X^*)$ es compacta con la topología débil estrella. Además, si denotamos por $A \subset X^*$ al subconjunto de las funciones crecientes, este conjunto es cerrado con la topología débil-estrella, vemos que es cerrado puesto que si $f \notin A$, entonces existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ y $f(x) - f(y) = \epsilon > 0$. De este modo, $\left\{g \in X^* : |g(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2},\ |g(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}\right\}$ es un abierto de la topología débil-estrella que contiene a f pero no a A.

De este modo, $A \cap M\mathcal{B}(X^*)$ es un cerrado de un compacto, luego también es compacto. Además, dada $f \in A \cap M\mathcal{B}(X^*)$, si $f(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{Q}$, la monotonía implica que $f = 0$. Por tanto, por el corolario 6.3, $A \cap M\mathcal{B}(X^*)$ es metrizable con la topología débil-estrella y, en particular, verifica el I Axioma de Numerabilidad.

Por tanto, $A \cap M\mathcal{B}(X^*)$ también es compacto por sucesiones, luego existe una subsucesión (f_{n_k}) convergente a f con la topología débil-estrella o, equivalentemente, la convergencia es puntual. $\square$

6.3. Compactificación de Stone-Cech

Proposición 6.1. Dado un espacio topológico X, sea $C_b(X)$ el espacio de las funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Entonces, la aplicación

$$\Delta : X \to C_b(X)^* :\ x \mapsto \delta_x,\ \delta_x(f) := f(x)$$

es continua, dotando a $C_b(X^*)$ de la topología débil-estrella.

Demostración. Sea un abierto subbásico $U = \{\mu \in C_b(X)^* : |\mu(f)| < \epsilon\}$, donde $f \in C_b(X)$. Entonces, $\Delta^{-1}(U) = \{x \in X : |f(x)| < \epsilon\} = f^{-1}(-\epsilon, \epsilon)$ es un conjunto abierto por la continuidad de f. $\square$

Definición 6.1. Un espacio topológico X se dice *completamente regular* si es Hausdorff y dados un punto $x_0 \in X$ y un cerrado $A \subset X$ tales que $x_0 \notin A$, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tales que $f(x_0) = 1$ y $f|_A = 0$.[7]

Proposición 6.2. Si X es un espacio topológico completamente regular, entonces, la aplicación $\Delta : X \to (C_b(X)^*, db^*) :\ x \mapsto \delta_x$, donde $\delta_x(f) := f(x)$ es un homeomorfismo sobre $\Delta(X)$.

Demostración. Por la proposición 6.1, Δ es continua. Además, como los puntos son cerrados, la condición de regularidad completa implica que, si $x_1 \neq x_2$, entonces existe $f \in C_b(X)$ tal que $f(x_1) = 1$ y $f(x_2) = 0$. Así, $\delta_{x_1}(f) \neq \delta_{x_2}(f)$, de modo que $\delta_{x_1} \neq \delta_{x_2}$. Por tanto, Δ es inyectiva.

Sea ahora $U \subset X$ un conjunto abierto y sea $x_0 \in U$. La condición de regularidad completa implica que existe $f \in C_b(X)$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f|_{X \setminus U} = 0$. Por otro lado, consideramos el conjunto

$$W = \{\mu \in C_b(X)^* : \mu(f) > 0\}$$

que es abierto porque, dada la inclusión $j : C_b(X) \to C_b(X)^{**}$, $j(f)$ es continua por la definición de topología débil-estrella y $W = (j(f))^{-1}(0, \infty)$. Entonces $V := W \cap \Delta(X)$ es un abierto en la topología heredada en $\Delta(X)$ como subespacio tal que $\delta_{x_0} \in V \subset \Delta(U)$. Como $x_0 \in U$ era arbitrario, llegamos a que $\Delta(U)$ es abierto en $\Delta(X)$. Por tanto, $\Delta : X \to \Delta(X)$ es un homeomorfismo. $\square$

[7] Esta definición es equivalente pidiendo que el espacio topológico X sea T_1, en lugar de Hausdorff.

Teorema 6.6. (Compactificación de Stone-Cech) Si X es un espacio topológico completamente regular, entonces existe un espacio topológico compacto y Hausdorff βX que cumple las siguientes propiedades.

1. Existe una aplicación continua $\Delta : X \to \beta X$ que además es un homeomorfismo sobre su imágen.
2. $\Delta(X)$ es denso en βX.
3. Si $f \in C_b(X)$, entonces existe una aplicación continua $f^\beta : \beta X \to \mathbb{K}$ tal que $f^\beta \circ \Delta = f$.

Además, si Ω es un espacio compacto con estas propiedades, entonces Ω es homeomorfo a βX mediante un homeomorfismo g que verifica que $g \circ \Delta = \pi$.

Demostración. Sea $\Delta : X \to C_b(X)^* : \; x \mapsto \delta_x$, donde $\delta_x(f) = f(x)$ y sea $\beta X = \overline{\Delta(X)}^{(db^*)}$. Dotando a $C_b(X)^*$ con la topología débil-estrella, Δ es un homeomorfismo sobre su imagen por la proposición 6.2. Fijado $x \in X$, entonces $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$, de modo $\|\delta_x\| \leq 1$. Por tanto, βX es un cerrado de $\mathcal{B}(C_b(X)^*)$, que es compacto por el teorema de Alaoglu 6.1. Por tanto, βX es compacto y, por la proposición 4.2, es Hausdorff. Además, $\Delta(X)$ es denso en βX por definición.

Dado $f \in C_b(X)$, definimos $f^\beta : \beta X \subset C_b(X)^* \to \mathbb{K} : \tau \mapsto \tau(f)$, que es continua por la definición de topología débil-estrella y, además,

$$(f^\beta \circ \Delta)(x) = f^\beta(\delta_x) = \delta_x(f) = f(x) \; \forall x \in X$$

Para ver la unicidad, sean Ω otro espacio topológico compacto y $\pi : X \to \Omega$ una aplicación que verifica la compactificación de Stone-Cech. En particular, para cada $f \in C_b(X)$, existe $\tilde{f} \in C(\Omega)$ tal que $\tilde{f} \circ \pi = f$. Definimos:

$$g : \Delta(X) \to \Omega : \; x \mapsto \pi \circ \Delta^{-1}(x)$$

Queremos extender esta función a βX. Para ello, sea $\tau_0 \in \beta X$. Por la condición (2) existe una red topológica $\{x_i : i \in \mathcal{I}\} \subset X$, donde $\mathcal{I}$ es un conjunto dirigido, tal que τ_0 es el límite de $\{\Delta(x_i) : i \in \mathcal{I}\}$. De este modo, $\{\pi(x_i)\}$ es una red en el conjunto compacto Ω, luego tiene que contener un punto de acumulación $\omega_0 \in \Omega$.

Tomamos entonces alguna $F \in C(\Omega)$ y definimos $f := F \circ \pi \in C_b(X)$, puesto que F también era acotada por ser Ω compacto. Por continuidad, como $\pi(X)$ es denso en Ω, $\tilde{f} = F$. Entonces, f también es continua con la topología débil-estrella cuando se considera como funcional del espacio bidual $C_b(X)^{**}$. Así, $f(x_i) = \Delta(x_i)(f) \to \tau_0(f) = f^\beta(\tau_0)$, donde $f^\beta \in C(\beta X)$ es la elevación de f. Sin embargo, $f(x_i) = F(\pi(x_i))$ tiene un punto de acumulación en $F(\omega_0)$. Por tanto, $f^\beta(\tau_0) = F(\omega_0)$. De este modo, cualquier otro punto de acumulación ω_0' de $\{\pi(x_i) : i \in \mathcal{I}\}$ tendría que verificar que $F(\omega_0) = F(\omega_0') \; \forall F \in \Omega_0$. Como Ω es completamente regular, puesto que es normal por ser compacto y Hausdorff y se aplica el lema 3.1, $\omega_0 = \omega_0'$. Además, tomando otra red $\{y_i\}$ también convergente a τ_0, podemos obtener otro punto de acumulación θ_0. Sin embargo $F(\theta_0) = f^\beta(\tau_0) = F(\omega_0) \; \forall F \in C(\Omega)$, luego $\omega_0 = \theta_0$. Por tanto, podemos definir $g(\tau_0) := \omega_0$.

Así, tenemos una extensión $g : \beta X \to \Omega$ tal que para cada $f \in C_b(X)$, entonces $f^\beta = \tilde{f} \circ g$. Sea $\{\tau_i : i \in \mathcal{I}\}$ una red topológica en βX tal que $\tau_i \to \tau$. Si $F \in C(\Omega)$, sea $f = F \circ \pi \in C_b(X)$, de modo que $\tilde{f} = F$. Por continuidad $f^\beta(\tau_i) \to f^\beta(\tau) \; \forall f^\beta \in C_b(X)$, luego

$$F(g(\tau_i)) = f^\beta(\tau_i) \to f^\beta(\tau) = F(g(\tau))$$

Por compacidad, $g(\tau_i)$ tiene un punto de acumulación ω. Como F es continua, $F(\omega) = F(g(\tau)) \; \forall F \in C(\Omega)$. Como Ω es completamente regular, $\omega = g(\tau)$. Así, como $g(\tau_i)$ está contenida en un compacto y sólo tiene un punto de acumulación en $g(\tau)$, este es su límite. Por tanto, g es continua.

Por otro lado, $\pi(X) = g(\Delta(X)) \subset g(\beta X)$ y $g(\beta X)$ es compacto por la continuidad de g, luego es cerrado porque Ω es Hausdorff. Como $\pi(X)$ es denso en Ω, se tiene que $g(\beta X) = \Omega$, es decir, que g es suprayectiva.

Para ver la inyectividad de g, sean $x_1, x_2 \in \beta X$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $g(x_1) = g(x_2)$. Como βX es compacto y Hausdorff, entonces es completamente regular y existe $f^\beta \in C(\beta X)$ tal que $f^\beta(x_1) \neq f^\beta(x_2)$. Definimos también $f := f^\beta \circ \Delta$ y tomamos $\tilde{f} \in C(\Omega)$ tal que $\tilde{f} \circ \pi = f$, que existe por la tercera hipótesis de la compactificación de Stone-Cech aplicada a Ω. Así, $\tilde{f} \circ g|_{\Delta(X)} = \tilde{f} \circ \pi \circ \Delta^{-1} = f \circ \Delta^{-1} = f^\beta|_{\Delta(X)}$. Así, estas funciones coinciden en $\Delta(X)$ y, como son continuas, $\mathbb{K}$ es Hausdorff y $\Delta(X)$ es denso, han de coincidir en βX. En particular, esto implicaría que $f^\beta(x_1) = f^\beta(x_2) \; \forall f^\beta \in C(\beta X)$, lo que supone una contradicción.

$$\begin{tikzcd}
\beta X \arrow[rr, "g"] \arrow[ddr, "f^{\beta}"'] & & \Omega \arrow[ddl, "\tilde{f}"] \\
& X \arrow[ul, "\Delta"'] \arrow[ur, "\pi"] \arrow[d, "f"] & \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

De este modo, $g : \beta X \to \Omega$ es biyectiva y continua. Como βX es compacto y Ω es Hausdorff, g es un homeomorfismo tal que $g \circ \Delta = \pi$. □

Lema 6.2. La compactificación de Stone-Cech de un espacio topológico discreto X es extremalmente disconexa, es decir, que la clausura de cualquier conjunto abierto es abierta.

Demostración. En primer lugar, comentar que todo espacio discreto es claramente completamente regular, por lo que se puede construir su compactificación de Stone-Cech. Entonces, sean $U_1, U_2 \subset \beta X$ dos conjuntos abiertos disjuntos y no vacíos. Sean $A_i = U_i \cap X$. Como X es dicreto, las funciones características χ_{A_i} son continuas, luego existen elevaciones $f^i : \beta X \to \mathbb{R}$ continuas, que por continuidad solo toman los valores 0 y 1. Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\chi_{A_1}\chi_{A_2} = 0$, luego las elevaciones también cumplen que $f_1 f_2 = 0$. Además, f_i valdrá constantemente 1 en U_i y, por continuidad en $\overline{U_i}$. Por tanto, $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$. Tomando $U_2 = X \setminus \overline{U_1}$, tenemos que $\overline{U_1}$ tiene que ser abierto. □

Definición 6.2. Dado un espacio topológico X compacto y Hausdorff, la σ-álgebra de Baire es la mínima σ-álgebra para la que toda función continua es medible.

Teorema 6.7. (Riesz-Kakutani) Sea $\phi \in C(\Omega, \mathbb{R})$ un funcional positivo, es decir, que que $\phi(f) \geq 0$ para cada $f \geq 0$. Entonces, existe una medida positiva μ definida en la σ-álgebra de Baire tal que

$$\phi(f) = \int_{\Omega} f \, d\mu$$

Demostración. Sea Γ el espacio topológico en el que al conjunto Ω se le dota de la topología discreta y sea $\beta\Gamma$ su compactificación de Stone-Cech. La función identidad $\Gamma \to \Omega$ es continua y se extiende a una función continua en $g : \beta X \to \Omega$. En efecto, sea $\tau_0 \in \beta\Gamma \setminus \Gamma$. Como Γ es denso, existe una red $\{\tau_i : i \in \mathcal{I}\}$ en Γ que converge a τ_0. Esta red tiene un punto de acumulación ω_0 en Ω. Entonces, si $F \in C(\Omega) \subset C_b(\Gamma)$, entonces existe una elevación $f^\beta : \beta\Gamma \to \mathbb{R}$. Entonces $f^\beta(\tau_0) = F(\omega_0)$. Como Ω es regular por ser compacto y Hausdorff (lema 3.1), ω_0 es único e independiente de la red tomada. Entonces $g(\tau_0) := \omega_0$ y, por construcción, si $F \in C(\Omega)$ y $f^\beta \in C(\beta\Gamma)$ es su elevación, entonces $f^\beta = F \circ g$. La continuidad de g se sigue de que si tenemos una red $\{\tau_i : i \in \mathcal{I}\} \to \tau_0 \in \beta\Gamma$, entonces $\{g(\tau_i)\}$ contiene algún punto de acumulación ω_0 en el compacto Ω. Dada $F \in C(\Omega) \subset C(\Gamma)$, tiene una elevación continua $f^\beta : \beta\Gamma \to \mathbb{R}$. Por tanto $f^\beta(\tau_i) = (F \circ g)(\tau_i) \to f^\beta(\tau_0) = (F \circ g)(\tau_0)$. Sin embargo, la continuidad de F implica que $F(\omega_0)$ es un punto de acumulación de esta red, luego coincide con $F(g(\tau_0))$. Como esto vale para toda $F \in C(\Omega)$, $g(\tau_0)$ es el único punto de acumulación de $\{g(\tau_i)\}$, luego la red tiende a dicho valor y, por tanto, g es continua.

Sea $\Phi \in C(\beta\Gamma, \mathbb{R})^*$ un funcional positivo y sea $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados de $\beta\Gamma$. De este modo, para cada $A \in \mathcal{A}$, la función característica χ_A es continua, por lo que podemos definir $\mu(A) := \Phi(\chi_A) \geq 0$. Por la linealidad de Φ, μ es finitamente aditiva en $\mathcal{A}$. También es numerablemente aditiva, puesto que si $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos cuya unión está en A, dicha unión es compacta luego todos los A_n son vacíos salvo una cantidad finita. Por tanto, μ es una medida en $\mathcal{A}$, que se extiende por el procedimiento de Caratheodory a una medida en $\sigma(A)$.

Queremos ver que $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra de Baire $Ba(\beta\Gamma)$. Claramente $\mathcal{A} \subset Ba(\beta\Gamma)$, puesto que las funciones características anteriormente mencionadas son continuas. Por tanto, $\sigma(\mathcal{A}) \subset Ba(\beta\Gamma)$. Para ver la otra inclusión, únicamente hace falta ver que toda función continua es $\sigma(\mathcal{A})$-medible. En efecto, sea $g \in C(\beta\Gamma, \mathbb{R})$ y sea $\alpha \in R$. Entonces, $E_n := f^{-1}\left(-\infty, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ es abierto y $\overline{E_n} \in \mathcal{A}$ por el lema 6.2. Entonces, f es $\sigma(\mathcal{A})$-medible puesto que

$$f^{-1}(-\infty, \alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \in \sigma(\mathcal{A})$$

Dada $f \in C(\beta\Gamma, \mathbb{R})$, se puede aproximar uniformemente por una sucesión creciente funciones simples $\mathcal{A}$-medibles $\{s_n\}$. El procedimiento para ello es el habitual considerando los conjuntos $A_{a,b} := \overline{f^{-1}(-\infty, b)} \setminus \overline{f^{-1}(-\infty, a)}$, que es abierto y cerrado y verifica que $f^{-1}(a,b) \subset A_{a,b} \subset f^{-1}([a,b])$. Entonces, la continuidad de Φ implica que

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Por otro lado, la función continua $g : \beta\Gamma \to \Omega$ induce una aplicación

$$T : C(\Omega, \mathbb{R}) \to C(\beta\Gamma, \mathbb{R}) : f \mapsto Tf : (Tf)(a) = f(g(a)) \ \forall a \in \beta(\Gamma)$$

que es una isometría por ser g suprayectiva. Por tanto, T también es inyectiva y podemos identificar $C(\Omega, \mathbb{R})$ con su imagen. De este modo, dado un funcional positivo $\phi \in C(\Omega, \mathbb{R})^*$, el teorema de extensión de Hahn-Banach 4.1 implica que existe una extensión $\Phi \in C(\beta\Gamma, \mathbb{R})^*$ tal que $\|\phi\| = \|\Phi\|$. Además, como ϕ es positivo, $\phi(\chi_\Omega) \geq \phi(x^*) \ \forall x^* \in \mathcal{B}(C(\Omega, \mathbb{R})^*)$, luego $\phi(\chi_\Omega) = \|\phi\|$. Por tanto,

$$\Phi(\chi_{\beta\Gamma}) = \phi(\chi_\Omega) = \|\phi\| = \|\Phi\|$$

Sea entonces $f \in C(\beta\Gamma, \mathbb{R})^*$ positiva y sea n tal que $n\chi_{\beta\Gamma} \geq f$ (existe porque f está acotada). Entonces Φ es positivo puesto que

$$\Phi(f) = \Phi(n\chi_{\beta\Gamma}) - \Phi(n\chi_{\beta\Gamma} - f) \geq \|\Phi\|(n - \|n\chi_{\beta\Gamma} - f\|) \geq 0$$

Si A está en $Ba(\Omega)$, entonces $g^{-1}(A)$ está en $Ba(\beta\Gamma)$, puesto que g es continua, por lo que podemos definir $\nu(A) := \mu(g^{-1}(A))$. Por tanto, si $f \in C(\Omega, \mathbb{R})^*$, entonces,

$$\phi(f) = \Phi(Tf) = \Phi(f \circ g) = \int_{\beta\Gamma} f \circ g \, d\mu = \int_\Omega f \, d\nu$$ [8]

□

Corolario 6.7. Sea Ω un espacio topológico compacto y Hausdorff. Si $\phi \in C(\Omega, \mathbb{K})^*$, donde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces existe una medida μ definida en la σ-álgebra de Baire de Ω (no necesariamente positiva) con valores en $\mathbb{K}$ tal que

$$\phi(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \forall f \in C(\Omega, \mathbb{K})$$

Demostración. Análogo a la demostración del teorema 6.7. □

Observación 6.1. Del lema de Urysohn puede deducirse (ver [5], cap. 12) que, en un espacio compacto y Hausdorff, los conjuntos cerrados y G_δ (intersecciones numerables de abiertos) son los ceros de una función continua, luego pertenecen a la σ-álgebra de Baire. También se puede ver que si el espacio es además II Axioma de Numerablidad, entonces todo abierto es unión numerable de conjuntos compactos, luego todo cerrado es G_δ. Por tanto, las σ-álgebras de Baire y Borel coinciden.

7. Conjuntos Convexos

En esta sección, vamos a ver algunas propiedades sobre subconjuntos convexos en espacios vectoriales topológicos.

Definición 7.1. Dado un subconjunto convexo $K \subset X$, un punto $a \in K$ se dice *punto extremo* si para todo $x, y \in K$, $\nexists \lambda \in (0,1)$ tal que $a = \lambda x + (1-\lambda)y$. El conjunto de puntos extremos de un subconjunto convexo K se denota por $ext(K)$.

Proposición 7.1. Dado un conjunto convexo K en un espacio vectorial X, $a \in ext(K)$ si y sólo si $K \setminus \{a\}$ es un conjunto convexo.

[8] La última igualdad se ve para funciones simples de manera sencilla y se generaliza a funciones medibles a partir del teorema de la convergencia monótona.

Demostración. Si $a \in ext(K)$, entonces dados $x, y \in K \setminus \{a\}$, el segmento $(x, y) := \{\lambda y + (1-\lambda)x : \lambda \in (0, 1)\}$ está contenido en K por la convexidad. Además, no contiene a a por la definición de punto extremo.

Recíprocamente, si $K \setminus \{a\}$ es convexo, entonces dados $x, y \in K \setminus \{a\}$, $(x, y) \subset K \setminus \{a\}$, luego $a \notin (x, y)$. Por tanto, a es un punto extremo en K. □

Definición 7.2. Dado un subconjunto A de un espacio vectorial topológico X, se define la *envoltura convexa* de A, denotada como $co(A)$, como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A.

Observación 7.1. La envoltura convexa de un subconjunto $A \subset X$ es claramente el menor conjunto convexo que lo contiene. Además, puede entenderse como la unión de las envolturas convexas de todos los subconjuntos finitos de A. De este modo,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i : s \in \mathbb{N}, \lambda_i \in (0, 1], a_i \in A, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\}$$

Proposición 7.2. Dado un conjunto convexo K en un espacio vectorial X, $a \in ext(K)$ si y sólo si $K \setminus \{a\}$ es un conjunto convexo.

Demostración. Si $a \in ext(K)$, entonces dados $x, y \in K \setminus \{a\}$, el segmento $(x, y) := \{\lambda y + (1-\lambda)x : \lambda \in (0, 1)\}$ está contenido en K por la convexidad. Además, no contiene a a por la definición de punto extremo.

Recíprocamente, si $K \setminus \{a\}$ es convexo, entonces dados $x, y \in K \setminus \{a\}$, $(x, y) \subset K \setminus \{a\}$, luego $a \notin (x, y)$. Por tanto, a es un punto extremo en K. □

Ejemplo 7.1. Si $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{K})$ es un conjunto convexo cuyos puntos extremos son aquellos $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda| = 1$.

Ejemplo 7.2. Consideramos el espacio l_∞ y su bola unidad $\mathcal{B}(l_\infty)$. Fácilmente, se ve que $\mathcal{B}(l_\infty)$ es convexo y que sus puntos extremos son las sucesiones en las que cada una de sus entradas valen 1 ó -1. Nótese que en este caso, no todos los elementos de norma 1 son puntos extremos de la bola unidad.

Ejemplo 7.3. Dado un espacio topológico Ω compacto y Hausdorff, consideremos el conjunto de funcionales positivos ϕ en $C(\Omega, \mathbb{R})^*$ tales que $\phi(\chi_\Omega) = 1$. Este conjunto es claramente convexo. Veamos que sus puntos extremos son $\delta_x(f) := f(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Sean ϕ_1 y ϕ_2 dos funcionales positivos tales que $\delta_x = \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$ y sea f una función no negativa tal que $f(x) = 0$. Entonces:

$$0 = f(x) = \delta_x(f) = \lambda\phi_1(f) + (1-\lambda)\phi_2(f)$$

Como los funcionales son positivos, $\phi_1(f) = \phi_2(f) = 0$. Si f es arbitraria, con $f(x) = 0$, escribiendo $f = f_+ - f_-$, se ve que $\phi_1(f) = \phi_2(f) = 0$. De este modo, el núcleo de δ_x está contenido en los núcleos de ϕ_1 y ϕ_2. Como estos núcleos tienen codimensión 1, ϕ_1 y ϕ_2 son proporcionales a δ_x. Así, como $1 = \delta_x(\chi_\Omega) = \phi_1(\chi_\Omega) = \phi_2(\chi_\Omega)$, entonces $\delta_x = \phi_1 = \phi_2$. Por tanto, δ_x es un punto extremo.

Para ver que estos son los únicos puntos extremos del conjunto, sea ϕ otro funcional positivo normalizado. Por el teorema 6.7, existe una medida positiva definida en la σ-algebra de Baire tal que

$$\phi(f) = \int_\Omega f \, d\mu \ \forall f \in C(\Omega, \mathbb{R})^*$$

Por la normalización, $\mu(\Omega) = 1$. Si existe $x \in X$ tal que $\mu(\{x\}) = 1$. Entonces $\phi = \delta_x$. En caso contrario, podemos encontrar una partición $\{A_1, A_2\}$ [9] de Ω formada por conjuntos no vacíos y de medida no nula. Entonces, las medidas

$$\mu_i(E) := \frac{\mu(\Omega)}{\mu(A_i)} \mu(E \cap A_i), \ i = 1, 2$$

definen funcionales positivos y normalizados ϕ_1 y ϕ_2 tales que

$$\phi = \frac{\mu(A_1)}{\mu(\Omega)} \phi_1 + \frac{\mu(A_2)}{\mu(\Omega)} \phi_2$$

de modo que ϕ no es un punto extremo.

[9] El lema de Zorn garantiza la existencia de un subconjunto de Ω minimal A entre los de medida 1. Si A contiene dos puntos distintos, el lema de Urysohn implica que existe un conjunto Baire medible que contiene exáctamente a uno de los dos. Intersecando con A obtenemos un subconjunto A_1 propio y no vacío de A_1 medible. Entonces, ni A_1 ni $A \setminus A_1$ tienen medida 1, por lo que tampoco tienen medida nula. Así, $\mu(A_1) \in (0, 1)$, luego tenemos la partición buscada.

7.1. Teorema de Krein-Milman

El teorema de Krein-Milman 7.1 nos dice que un conjunto compacto y convexo puede recuperarse a partir de sus puntos extremos.

Lema 7.1. Sea X un espacio vectorial topológico y A un subconjunto convexo. Si $a \in \operatorname{int}(A)$ y $b \in \overline{A}$, entonces $[a, b) := \{\lambda b + (1-\lambda)a : \lambda \in [0,1)\} \subset \operatorname{int}(A)$.

Demostración. Fijamos $\lambda \in (0,1)$ y consideramos $c := \lambda b + (1-\lambda)a$. Como $a \in \operatorname{int}(A)$ y X es un espacio vectorial topológico, existe un entorno abierto del origen V tal que $a + V \subset A$. Así, como A es convexo para todo $d \in A$ se tiene que

$$A \supset \lambda d + (1-\lambda)(a+V) = \lambda(d-b) + \lambda b + (1-\lambda)(a+V) = [\lambda(d-b) + (1-\lambda)V] + c$$

Como $b \in \overline{A}$, entonces $\exists d \in \left[b - \lambda^{-1}(1-\lambda)V\right] \cap A$, puesto que $-\lambda^{-1}(1-\lambda)V$ es un entorno abierto del origen porque las multiplicaciones por escalares no nulos son homeomorfismos de un espacio vectorial topológico en sí mismo. Con este d, se tiene que $0 \in \lambda(d-b) + (1-\lambda)V$, luego $c + U \subset A$, donde $U := \lambda(d-b) + (1-\lambda)V$ es un abierto que contiene al cero. De este modo, $c \in \operatorname{int}(A)$. □

Teorema 7.1. (Krein-Milman) Si K es un subconjunto convexo, compacto y no vacío de un ELC X, entonces $ext(K) \neq \emptyset$ y K es el cierre de la envoltura convexa de $ext(K)$.

Demostración. Definimos $\mathcal{U}$ como el conjunto de los subconjuntos propios de K que son relativamente abiertos y convexos. $\mathcal{U} \neq \emptyset$ puesto que $\emptyset \in \mathcal{U}$. Entonces, si $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ es una cadena (con respecto a la relación de orden dada por la inclusión). Entonces, $\tilde{\mathcal{U}_0} := \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} U$ es una cota superior de U. En efecto, es abierto por ser unión de abiertos y dados $x, y \in \tilde{\mathcal{U}_0}$, existen $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_0$ tales que $x \in U_1$ e $y \in U_2$. Sin pérdida de generalidad, por la condición de cadena podemos suponer que $U_1 \subset U_2$. Entonces, $x \in U_2$, luego $(x, y) \subset U_2 \subset \tilde{\mathcal{U}_0}$. La compacidad de K implica que $\tilde{\mathcal{U}_0} \neq K$, puesto que en caso contrario, habría por compacidad un subrecubrimiento finito de K y por la condición de cadena habría un elemento de $\mathcal{U}_0$ igual a K, lo que supone una contradicción. Por el lema de Zorn, $\mathcal{U}$ contiene un elemento maximal U.

Si K tiene más de un punto, $U \neq \emptyset$ porque el espacio es Hausdorff y localemente convexo. Si $x \in U$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces definimos la aplicación afín:

$$T_{x,\lambda} : K \to K : \ y \mapsto \lambda y + (1-\lambda)x$$

que está bien definida por la convexidad de K. Entonces, $T_{x,\lambda}$ es claramente continua (por ser el espacio vectorial topológico) y afín, puesto que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \Rightarrow T_{x,\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j\right) = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j\right) - (1-\lambda)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T_{x,\lambda}(y_j)$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_j \in \mathbb{K}$ e $y_1, \ldots, y_j \in K$. Además, $T_{x,\lambda}(U) \subset U$ o, equivalentemente, $U \subset T_{x,\lambda}^{-1}(U)$. Por la afinidad y la continuidad $T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ es un abierto convexo, luego por la maximalidad de U, $T_{x,\lambda}^{-1}(U)$ ha de ser igual a U o a K.

Sin embargo, dado $y \in \overline{U}$, el lema 7.1 implica que $T_{x,\lambda}(y) \in U$, luego $\overline{U} \subset T_{x,\lambda}^{-1}(U)$. Como K es conexo por caminos, en particular es conexo, por lo que al ser $U \notin \{\emptyset, K\}$ abierto, U no puede ser también cerrado, luego $U \subsetneq \overline{U} \subset T_{x,\lambda}^{-1}(U)$. Por la maximalidad, la única posibilidad es que $T_{x,\lambda}^{-1}(U) = K$.

Supongamos ahora que $a, b \in K \setminus U$ son tales que $a \neq b$. Según la demostración de la proposición 4.2 podemos encontrar un entorno abierto convexo de a, de la forma $V_a = \{x \in X : p(x-a) < \epsilon\}$ para algún $p \in \mathcal{P}$, tales que $b \notin V_a$. Entonces, $U \subsetneq U \cup V_a$ que es un abierto convexo puesto que si $x \in U$, $y \in V_a$ y $\lambda \in (0,1)$, entonces $T_{x,\lambda}(y) \in T_{x,\lambda}(K) \subset U \subset U \cup V_a$. Entonces, $U \cup V_a = K$, lo que es imposible porque b no puede pertenecer a este conjunto.

Así, los conjuntos maximales de $\mathcal{U}$ son de la forma $K \setminus \{a\}$, donde $a \in ext(K)$ por la proposición 7.2. En particular, la existencia de un elemento maximal implica que $ext(K) \neq \emptyset$.

Para la segunda afirmación, sea V un abierto convexo de X tal que $ext(K) \subset V$. Entonces, $K \cap V$ es un conjunto relativamente abierto en K y convexo por ser intersección de conjuntos convexos. Si $K \not\subset V$, entonces $K \cap V \neq K$ estaría contenido en un conjunto maximal $U \in \mathcal{U}$, aplicando el lema de Zorn a los subconjuntos convexos propios de K que contienen a V. Como $U = K \setminus \{a\}$ para cierto $a \in ext(K)$, entonces se contradice que $ext(K) \subset V$. Por tanto, $K \subset V$.

Claramente, $co(ext(K)) \subset K$, luego como K es cerrado por ser un compacto en un espacio Hausdorff, entonces $\overline{co(ext(K))} \subset K$. Además, $\overline{co(ext(K))}$ es convexo por la proposición 4.1. Veamos que se da la igualdad. Si existiese $a \in K \setminus \overline{co(ext(K))}$, entonces por el teorema de separación de Hanh-Banach 4.2, junto con su corolario 4.4, existiría un $x^* \in X^*$ tal que

$$\sup \left\{ \Re x^*(x) : x \in \overline{co(ext(K))} \right\} < \Re(x^*(a))$$

Si consideramos el conjunto abierto y convexo

$$V = \{x \in X : \Re(x^*(x)) < \Re(x^*(a))\}$$

Entonces, $ext(K) \subset V$ y, por tanto, $K \subset V$. Sin embargo, $a \notin V$ por la definición de este. Esto supone una contradicción, que prueba que $K = \overline{co(ext(K))}$.

□

Corolario 7.1. c_0 no es el dual de ningún espacio normado.

Demostración. Supongamos que lo fuese. Entonces, $\mathcal{B}(c_0)$ sería compacta con la topología débil-estrella y, por el teorema 7.1, $ext(\mathcal{B}(c_0)) \neq \emptyset$. Así, sea $(x_n) \in ext(\mathcal{B}(c_0))$. Por definición $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_N| < 1$. Sea $\epsilon \in (0, 1 - |x_N|)$. Entonces:

$$\{(x_n) - e_N \epsilon(2\lambda - 1) : \lambda \in [0,1]\} \subset \mathcal{B}(c_0)$$

lo que contradice que $(x_n) \in ext(\mathcal{B}(c_0))$. Esta contradicción prueba que c_0 no es el dual de ningún espacio. □

7.2. El teorema del punto fijo de Schauder

El teorema del punto fijo de Schauder surge como una generalización del punto fijo de Brower, que es un resultado que se demuestra con técnicas de la topología algebraica.

Teorema 7.2. (Punto fijo de Brower) Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $f : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ una función continua. Entonces, existe un punto $x \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Ver [3]. □

Este resultado se generaliza fácilmente a conjuntos compactos y convexos en espacios normados de dimensión finita.

Proposición 7.3. Sea K es un subconjunto compacto y convexo de un espacio normado X de dimensión finita y sea $f : K \to K$ continua. Entonces, existe $x \in K$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Como X tiene dimensión finita y en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, $X \cong \mathbb{R}^n$, para cierto $n \in \mathbb{N}$. Entonces K es acotado, luego $K \subset r\mathcal{B}(X)$, para cierto $r \in (0, \infty)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $r = 1$. Sea $\phi : \mathcal{B}(X) \to K$ la función que asocia a cada punto $x \in \mathcal{B}(X)$ el único punto $y \in K$ tal que $\|y - x\| = d(x, K)$. La existencia de y se debe a la compacidad de K y la unicidad a su convexidad. La continuidad de ϕ puede verse de manera geométrica. Entonces, $f \circ \phi : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{B}(X)$ es continua, luego tiene un punto fijo x por el teorema 7.2. Como $\mathrm{Im}(f \circ \phi) \subset \mathrm{Im}(f) \subset K$, el punto fijo tiene que estar en K. Por último, como $\phi|_K = \mathrm{Id}_K$, entonces $f(x) = x$. □

El teorema del punto fijo de Schauder es una generalización a espacios normados de dimensión infinita. Para ello, debemos considerar únicamente aplicaciones compactas.

Definición 7.3. Dado un espacio normado X y $E \subset X$, una función $f : E \to X$ se dice *compacta* si es continua y $\overline{f(A)}$ es compacto siempre que $A \subset E$ esté acotado.

Lema 7.2. Si K es un subconjunto compacto de X, $\epsilon > 0$ y A es un subconjunto finito de X tal que $K \subset \{x \in X : d(x, A) < \epsilon\}$, entonces la aplicación

$$\phi_A(x) : K \to X : \ x \mapsto \frac{\sum_{a \in A} m_a(x) a}{\sum_{a \in A} m_a(x)}$$

donde $m_a(x) = \text{máx}\{0, \epsilon - \|x - a\|\}$, es continua y verifica que $\|\phi_A(x) - x\| < \epsilon \ \forall x \in K$.

Demostración. La continuidad de ϕ_A se sigue de que $\sum_{a \in A} m_A(x) > 0 \ \forall x \in K$. En cuanto a la segunda afirmación, como $\|x - a\| < \epsilon$ para cada $x \in K$ y $a \in A$ para el cual $m_a(x) \neq 0$, entonces,

$$\|\phi_A(x) - x\| = \left\| \frac{\sum_{a \in A} m_a(x)(a - x)}{\sum_{a \in A} m_a(x)} \right\| \leq \frac{\sum_{a \in A} m_a(x) \|a - x\|}{\sum_{a \in A} m_a(x)} < \epsilon$$

□

Teorema 7.3. (Punto fijo de Schauder) Sea E un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio normado X. Si $f : E \to X$ es una aplicación compacta que verifica que $f(E) \subset E$, entonces existe $x \in E$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Sea $K = \overline{f(E)} \subset E$. Como K es compacto por ser f compacta, K es totalmente acotado y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito A_n tal que $K \subset \left\{x \in X : d(x, A_n) < \frac{1}{n}\right\}$. Sea $\phi_n = \phi_{A_n}$ la aplicación dada en el lema 7.2. Por definición, $\phi_n(K) \subset co(K) \subset E$, puesto que E es convexo. La función $f_n := \phi_n \circ f : E \to E$ verifica, por el lema 7.2 que

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{1}{n} \ \forall x \in E$$

Por otro lado, sea $X_n := \text{Span}(A_n)$ y $E_n = E \cap X_n$. Así, E_n es convexo por ser intersección de conjuntos convexos y es compacto por ser cerrado y acotado en el espacio de dimensión finita X_n. Además, f_n es continua y verifica que $f_n(E_n) \subset X_n \cap E = E_n$. Así, por la proposición 7.3, existe un punto $x_n \in E_n$ tal que $f_n(x_n) = x_n$.

Así, $\{f(x_n)\} \subset K$ tiene una subsucesión $\{f(x_{n_j})\}$ que converge a cierto $x_0 \in K$. Como $f_{n_j}(x_{n_j}) = x_{n_j}$, se tiene que

$$\|x_{n_j} - x_0\| \leq \|f_{n_j}(x_{n_j}) - f(x_{n_j})\| + \|f(x_{n_j}) - x_0\| \leq \frac{1}{n_j} + \|f(x_{n_j}) - x_0\|$$

Por tanto, $x_{n_j} \to x_0$, y como f es continua, entonces

$$f(x_0) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j \to \infty} f_{n_j}(x_{n_j}) = \lim_{j \to \infty} x_{n_j} = x_0$$

□

7.3. Teorema de Krein-Smulian

El teorema de Krein-Smulian se aplica a topologías débiles-estrella en espacios de Banach X. En la topología débil, si tenemos un conjunto cerrado A, entonces $A \cap \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ también es cerrado en la topología débil por ser intersección de cerrados, debido al teorema 5.3. Este teorema también nos dice que el recíproco es cierto en conjuntos convexos: si A es un conjunto convexo tal que $A \cap \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ es cerrado con la topología débil-estrella para todo $r \in (0, \infty)$, entonces A es cerrado con dicha topología. Por el teorema 5.3, únicamente es necesario ver que es cerrado respecto de la norma del espacio de Banach. Para ello sea $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \to x_0 \in X$. Como esta sucesión es convergente es acotada por cierto $r \in (0, \infty)$ y como $A \cap \{x \in X : \|x\| \leq r\}$ es cerrado en al topología del espacio de Banach, por serlo en una topología menos fina como es la débil-estrella, entonces $x_0 \in A$.

También podemos estudiar esta propiedad en la topología débil-estrella definida en X^*. Si A es cerrado y convexo con la topología débil estrella, entonces $A \cap \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$ es cerrado, porque la bola lo es por la proposición 4.2 y el teorema 6.1 y porque la intersección de cerrados es un conjunto cerrado. Sin embargo, nos podemos preguntar qué ocurre con el recíproco. Si X es reflexivo, entonces esto es lo que acabamos de comentar para la topología débil. Sin embargo, si X no es reflexivo, entonces es más complejo y se conoce como el teorema de Krein-Smulian. No obstante, antes de demostrar este teorema debemos considerar algunos lemas previos.

Definición 7.4. Dado un ELC X, si $A \subset X$, la *polar* de A, denotada por A^o, es el subconjunto de X^* definido por

$$A^o := \{x^* \in X^* : |x^*(a)| \leq 1 \ \forall a \in A\}$$

Análogamente, si $B \subset X^*$, la *prepolar* de B, denotada por ${}^oB$ es

$${}^oB := \{x \in X : |b^*(x)| \leq 1 \ \forall b^* \in B\}$$

Por último, la *bipolar* de un conjunto de un conjunto $A \subset X$ es ${}^o(A^o)$.

Lema 7.3. Si X es un espacio de Banach y $r > 0$, sea $\mathcal{F}_r$ la colección de todos los subconjuntos finitos de $\{x \in X : \|x\| \leq r^{-1}\}$. Entonces,

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F^o = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$$

Demostración. Claramente, si $\|x^*\| \leq r$, entonces $x^* \in F^o$, $\forall F \in \mathcal{F}_r$. Por tanto, $\{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\} \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F^o$.

Recíprocamente, si $\|x^*\| > r$, $\exists x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$ y $|x^*(x)| > r$. Entonces, $\{r^{-1}x\} \in \mathcal{F}_r$, pero por linealidad $|x^*(r^{-1}x)| > 1$. Por tanto $x^* \notin \bigcap_{F \in \mathcal{F}_r} F^o$. De este modo, hemos obtenido la igualdad deseada. □

Lema 7.4. Si X es un espacio de Banach y A es un subconjunto convexo de X^* tal que $A \cap \{x \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$ es cerrado con la topología débil-estrella para todo $r \in (0, \infty)$ y, además, $A \cap \mathcal{B}(X^*) = \emptyset$, entonces $\exists x \in X$ tal que $\Re\left(x^*(x)\right) \geq 1 \ \forall x^* \in A$.

Demostración. El primer paso de la demostración consiste en ver por inducción que existen conjuntos finitos F_0, F_1, ... de X tales que

$$nF_n \subset \mathcal{B}(X), \quad n\mathcal{B}(X^*) \cap \textstyle\bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^o \cap A = \emptyset$$

El caso $n = 0$ se obtiene definiendo $F_0 := \{0\}$. Para el caso general, supongamos que $F_0, \ldots, F_{n-1}$ han sido escogidos y sea

$$Q = (n+1)\mathcal{B}(X^*) \cap \bigcap_{k=0}^{n-1} F_k^o \cap A$$

Entonces, Q es compacto en la topología débil-estrella ya que por el teorema 6.1 $\mathcal{B}(X^*)$ es compacto y $(n+1)\mathcal{B}(X^*)$ también lo es porque la multiplicación por escalares no nulos es un homeomorfismo del espacio vectorial en sí mismo. La polar de un punto $\{x_0\} \subset X$ es cerrado porque los funcionales $x^* \in X^* \mapsto x^*(x_0)$ son continuos por la definición de la topología débil-estrella y la polar es, precisamente, la imagen inversa de la bola unidad de $\mathbb{K}$. Así, las polares de conjuntos son intersecciones de cerrados, luego son cerrados. Además, al intersecar $A \cap (n+1)\mathcal{B}(X^*)$ obtenemos un conjunto cerrado por hipótesis, luego Q es un conjunto cerrado de un compacto, luego es compacto.

Por tanto, si $Q \cap F^o \neq \emptyset$ para todo conjunto finito $F \subset n^{-1}\mathcal{B}(X)$, entonces por la compacidad de Q [10]

$$Q \cap \bigcap\{F^o : F \text{ finito}, \ F \subset n^{-1}\mathcal{B}(X)\} \neq \emptyset$$

Y por el lema 7.3, esto es equivalente a que

$$Q \cap n\mathcal{B}(X) \neq \emptyset$$

lo que contradice la hipótesis de inducción. De este modo, existe un subconjunto finito $F_n \subset n^{-1}\mathcal{B}(X)$ tal que $Q \cap F_n^o = \emptyset$.

Tomamos $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ verificando estas condiciones. Claramente,

$$A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^o = \emptyset$$

Como es un conjunto numerable, si dotamos a $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ de un orden, podemos formar una sucesión $\{x_n\}$. Esta sucesión verifica que $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = 0$, pues únicamente una cantidad finita de elementos tiene norma

[10] La intersección finita de polares de ciertos conjuntos es la polar de la unión. Por tanto, este resultado se deduce de que ninguna intersección finita es vacía. El hecho de que la intersección final sea no vacía se deduce de la propiedad de intersecciones finitas de cerrados en conjuntos compactos.

mayor que $\frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, si $x^* \in X^*$, entonces $\{x^*(x_n)\} \in c_0$. De este modo, podemos definir el siguiente funcional lineal

$$T : X^* \to c_0 : \; x^* \mapsto \{x^*(x_n)\}$$

Así, por la linealidad de T, $T(A)$ es un subconjunto convexo de c_0. Además, como $A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n^o = \emptyset$, entonces

$$\|T(x^*)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} x^*(x_n) > 1 \;\forall x^* \in A$$

de modo que $T(A) \cap \mathcal{B}(c_0) = \emptyset$. Así, el conjunto

$$T(A) - \mathcal{B}(c_0) = \{x - y : x \in T(A), y \in \mathcal{B}(c_0)\} = \{x \in X : d(x, T(A))\} \leq 1$$

es un conjunto cerrado, porque la función distancia a un conjunto es continua, que no contiene al cero y que es convexo por ser la resta de conjuntos convexos. Entonces, por el teorema de separación de Hahn-Banach 4.2 y el corolario 4.4, existe un funcional $f \in l_1 = c_0^*$ tal que

$$\Re f(z) \geq 0 \;\forall z \in T(A) - \mathcal{B}(c_0) \Rightarrow \Re f(T(x^*)) \geq \Re f(y), \;\forall x^* \in A, \;\forall y \in \mathcal{B}(c_0^*)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\|f\| = 1$. Entonces

$$1 \leq \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^*(x_n)\right) \;\forall x^* \in A$$

Como $f \in l_1$ y $\|f(n)x_n\| \leq |f(n)|\|x_n\| \leq |f(n)|$ porque $x_n \in \mathcal{B}(X)$, la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y podemos considerar, debido a que X es completo, la suma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x_n$$

Entonces, como los elementos del dual x^* son continuos:

$$\Re\left(x^*(x)\right) = \Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^*(x_n)\right) \geq 1 \;\forall x^* \in A$$

□

Teorema 7.4. (Krein-Smulian) Si X es un espacio de Banach y A es un conjunto convexo de X^* tal que $A \cap \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$ es cerrado con la topología débil-estrella para todo $r \in (0, \infty)$, entonces A es cerrado con la topología débil-estrella.

Demostración. Sea $x_0 \in X^* \setminus A$. Como la topología de la norma es más fina que la topología débil-estrella, $A \cap \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq r\}$ es cerrado con la topología de la norma. Para ver que A es cerrado con esta topología, tomamos una sucesión $(y_n^*) \subset A$, tal que $y_n^* \to y_0^*$, con la topología de la norma. En particular, la sucesión $\|y_n^*\|$ está acotada por cierto $M \in (0, \infty)$, luego está contenida en $A \cap \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq M\}$. Como este conjunto es cerrado con respecto a la norma, $y_0^* \in A \cap \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq M\} \subset A$.

De este modo, $\exists r \in (0, \infty)$ tal que $\{x^* \in X^* : \|x^* - x_0^*\| \leq r\} \cap A = \emptyset$. Entonces,

$$\mathcal{B}(X^*) \cap r^{-1}(A - x_0^*) = \emptyset$$

Como las traslaciones y los productos por escalares no nulos son homeomorfismos de un espacio vectorial topológico en sí mismo y las bolas trasladadas son subconjuntos cerrados de bolas más grandes centradas en el origen, $r^{-1}(A - x_0)$ verifica las condiciones del lema 7.4 y, entonces existe $x \in X$ tal que

$$\Re(x^*(x)) \geq 1 \;\forall x^* \in r^{-1}(A - x_0)$$

Como x es un funcional continuo con la topología débil-estrella, $x^{-1}\left(\{z \in \mathbb{K} : \Re z \geq 1\}\right)$ es un conjunto cerrado, que contiene a $r^{-1}(A - x_0)$ pero no contiene a 0, es decir, $0 \notin \overline{r^{-1}(A - x_0)}^{(db^*)}$. De nuevo, como las traslaciones y multiplicaciones por escalares no nulos son homeomorfismos en los espacios vectoriales topológicos, $x_0 \notin \overline{A}^{(db^*)}$. Así, $A = \overline{A}^{(db^*)}$, de modo que A es cerrado en la topología débil-estrella. □

Una consecuencia del teorema de Krein-Smulian es que, si el espacio de Banach X es separable, podemos caracterizar los conjuntos cerrados en función de que sean cerrados por sucesiones, siempre que sean convexos. Esta característica se cumple en todos los espacios topológicos que verifican el I Axioma de Numerabilidad, pero que a priori no la teníamos en la topología débil-estrella.

Corolario 7.2. Si X es un espacio de Banach separable, un subconjunto $A \subset X^*$ convexo es débilmente-estrella cerrado si y sólo si es secuencialmente cerrado con dicha topología.

Demostración. Si A es cerrado, también lo es secuencialmente. Recíprocamente, como X es separable, $r\mathcal{B}(X^*)$ es metrizable $\forall r \in (0, \infty)$, por el corolario 6.5. Por tanto, $A \cap r\mathcal{B}(X^*)$ es cerrado si y sólo si es secuencialmente cerrado, pues esta equivalencia se tiene en espacios métricos. Por tanto, si A es secuencialmente cerrado, $A \cap r\mathcal{B}(X^*)$ es cerrado, y por el teorema de Krein-Smulian 7.4, A es cerrado. □

8. Compacidad débil

8.1. Teorema de Eberlein-Smulian

El teorema de Alaoglu 6.1 afirma que todos los conjuntos cerrados y acotados son compactos en la topología débil-estrella del dual de un espacio normado. En esta sección, queremos caracterizar la compacidad de subconjuntos de un espacio de Banach con la topología débil. Para ello, debemos considerar un resultado preliminar de análisis funcional

Teorema 8.1. (Principio de Acotación Uniforme) Sea X un espacio de Banach e Y un espacio normado y sean $T_i : X \to Y$, donde $i \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices, un conjunto de operadores lineales acotados. Entonces

$$\sup\{\|T_i\| : i \in \mathcal{I}\} < \infty \Leftrightarrow \sup\{\|T_i(x)\| : i \in \mathcal{I}\} < \infty \ \forall x \in X$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Dado $x \in X$, se tiene que

$$\|T_i(x)\| \leq \|T_i\|\|x\| \leq \sup\{\|T_i\| : i \in \mathcal{I}\}\|x\| < \infty$$

($\Leftarrow$): Sea $A_n := \bigcap_{i\in\mathcal{I}} T_i^{-1}(n\mathcal{B}(Y))$. La hipótesis $\sup\{\|T_i(x)\| : i \in \mathcal{I}\} < \infty \ \forall x \in X$ equivale a que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como X es completo, por el teorema 3.2 aplicado a los complementarios, se deduce que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}(A_{n_0}) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \mathrm{Int}(A_{n_0})$, luego existe $\delta > 0$ tal que $x_0 + \delta\mathcal{B}(X) \subset A_{n_0}$. Por tanto, para cada $i \in \mathcal{I}$, $\|T_i(x_0) + \delta u\| \leq n_0 \ \forall u \in \mathcal{B}(X)$. Como además $\|T_i(x_0)\| \leq n_0$, se llega a que $\|T_i(u)\| \leq \frac{2n_0}{\delta} \ \forall u \in \mathcal{B}(X)$. Por la definición de la norma de un operador,

$$\|T_i\| \leq \frac{2n_0}{\delta} \ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \sup\{\|T_i\| : i \in \mathcal{I}\} \leq \frac{2n_0}{\delta} < \infty$$

□

Teorema 8.2. (Eberlein-Smulian) Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$. Entonces, con la topología débil, son equivalentes:

1. Toda sucesión de elementos en A tiene una subsucesión convergente en X.
2. Toda sucesión de elementos en A tiene un punto de acumulación en X.
3. A es relativamente compacto, es decir, su adherencia es compacta.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Claro.

(2) $\Rightarrow$ (3): Para cada funcional lineal y continuo x', el conjunto $x'(A) \subset K$ verifica la hipótesis (2), luego tiene que ser acotado. Considerando los elementos de A como elementos del espacio bidual, el teorema de acotación uniforme 8.1 implica que $j(A)$ es acotado. Por la proposición 4.2 y el teorema 6.1, sabemos las bolas $r\mathcal{B}(X)$ son cerradas, luego $\overline{j(A)}^{(db^*)}$ está contenido en alguna bola centrada en el origen por estarlo también $j(A)$, es decir, que $\overline{j(A)}^{(db^*)}$ está acotado. Por el corolario 6.1, $\overline{j(A)}^{(db^*)}$ es compacto.

Veamos que $\overline{j(A)}^{(db^*)} \subset J(X)$. Para ello, sea $z \in \overline{j(A)}^{(db^*)}$ y sea $x_1' \in X'$ de norma 1. Como z está en el cierre de $j(A)$, existe $a_1 \in A$ tal que $|z - j(a_1)(x_1')| < 1$. Sea $F := \mathbb{K}z + \mathbb{K}(z - j(a_1))$. Como este subespacio es de dimensión finita, su esfera unidad es compacta y, por tanto, localmente acotada. De este modo, hay puntos $z_1, \ldots, z_n$ de norma 1 en F tal que para cualquiera otro $y \in F$ de norma 1, entonces exista algún $m = 1, \ldots, n$ tal que $\|y - z_m\| < \frac{1}{4}$. Como $z_m : \{x' \in X' : \|x'\| = 1\} \to \mathbb{K} : \ x' \mapsto z_m(x')$ son funciones con dominio conexo [11], la imagen es conexa, luego existe $x'_m \in X'$ de norma 1 tal que $z_m(x'_m) = \frac{3}{4}$. Entonces, para cada $y \in F$, se tiene que

$$\text{máx}\{y(x'_m) : m = 1, \ldots, n\} \geq \frac{1}{2}\|y\| \quad ^{12}$$

De este modo, existen puntos $x'_2, \ldots, x'_{n(2)} \in X'$ de norma 1 tales que

$$\text{máx}\{y(x'_m) : m = 2, \ldots, n(2)\} \geq \frac{1}{2}\|y\| \ \forall y \in \mathbb{K}z + \mathbb{K}(z - j(a_1))$$

De nuevo, como $z \in \overline{j(a)}^{(db^*)}$, existe $a_2 \in A$ tal que

$$\text{máx}\{|(z - j(a_2))(x'_m)| : m = 1, \ldots, n(2)\} < \frac{1}{2}$$

Continuando este proceso, para todo $k \in \mathbb{N}$ encontramos $x'_{n(k-1)+1}, \ldots, x'_{n(k)} \in X'$ de norma 1 y $a_k \in a$ tales que

$$\text{máx}\{y(x'_m) : m = n(k-1)+1, \ldots, n(k)\} \geq \frac{1}{2}\|y\| \ \forall y \in \mathbb{K}z + \mathbb{K}(z - j(a_1)) + \cdots + \mathbb{K}(z - j(a_{k-1}))$$

Y, además,

$$\text{máx}\{|(z - j(a_k))(x'_m)| : m = 1, \ldots, n(k)\} < \frac{1}{k}$$

Por hipótesis, existe un punto de acumulación x de la sucesión (a_n). Como $\overline{\text{Span}(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})}$ es cerrado con la topología débil, por el teorema 5.3, entonces $x \in \overline{\text{Span}(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})}$. Por construcción,

$$\sup\{|y(x'_m)| : m \in \mathbb{N}\} \geq \frac{1}{2}\|y\| \ \forall y \in \text{Span}(\{z - j(a_n) : n \in \mathbb{N}\}) + \mathbb{K}z \tag{1}$$

Entonces, esta desigualdad también es cierta, debido a la continuidad para cualquier punto en el cierre de este subespacio y, en particular, para $z - j(x)$.

Fijado $m \in \mathbb{N}$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $m < n(N)$. Así, para todo $r > N$ se tiene que

$$|(z - j(x))(x'_m)| \leq |(z - j(a_r))(x'_m)| + |(j(a_r) - j(x))(x'_m)| < \frac{1}{N} + |(x'_m)(a_r - x)|$$

Como x es un punto de acumulación de $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología débil, existe un a_k, donde $k > N$ tal que

$$|x'_m(a_k - x)| < \frac{1}{N} \Rightarrow |z - j(x)(x'_m)| < \frac{2}{N}$$

Como esto vale para N arbitrariamente grande, $(z - j(x))(x'_m) = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}$. Así, por la desigualdad dada en 1, $\|z - j(x)\| = 0$, luego $z = j(x) \in j(X)$.

Como $j : (X, db) \to (X^{**}, db^*)$ define claramente un homeomorfismo sobre la imagen, puesto que las topologías están definidas por las mismas funciones, entonces $j^{-1}\left(\overline{j(A)}^{(db^*)}\right)$ es un conjunto compacto con la topología débil que contiene a A. Por tanto, $\overline{A}^{(db)}$ será compacto con dicha topología.

(3) $\Rightarrow$ (1): Sea $\{a_n\} \subset A$ una sucesión de elementos contenida en A. Entonces, por el lema 6.1, $\overline{\text{Span}(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})}$ es separable y, por el corolario 6.2, $\overline{\text{Span}(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})} \cap A$ es metrizable, pues está contenido en un conjunto compacto, que sí es metrizable por dicho corolario y la metrizabilidad se hereda en la topología del subespacio. Entonces, toda sucesión (a_n) contiene una subsucesión convergente a un elemento de $\overline{\text{Span}(\{a_n\})}$ con la topología débil de este espacio. Como esta topología es la restricción de la topología débil en X al subespacio, por la proposición 5.2, la convergencia de la subsucesión también se da en la topología débil de X. $\square$

[11] Obviamos el caso en el que X es real y de dimensión 1, caso en el que el teorema es evidente

[12] Se ve fácilmente para y de norma 1 y para normas mayores se verifica también porque la desigualdad es positivamente homogenea.

Corolario 8.1. Dado un espacio de Banach X, un subconjunto $A \subset X$ es compacto con la topología débil si y sólo si para todo subespacio separable y cerrado $M \subset X$, $A \cap M$ es compacto con la topología débil de M.

8.2. Teorema de James

Dado un espacio de Banach real X, como los funcionales del dual son continuos cuando se dota a X de la topología débil, si $A \subset X$ es un conjunto compacto con dicha topología, entonces $x^*(A) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto fijado un $x^* \in X^*$. Esto implica que $\exists x_0 \in A$ tal que

$$x^*(x_0) = \sup\{x^*(a) : a \in A\}$$

El recíproco también es cierto, pero es un resultado mucho más profundo, conocido como teorema de James. En primer lugar, lo veremos para espacios separables, y a partir de ahí obtendremos los corolarios que se deducen de este teorema. La prueba del caso general tiene ideas similares pero alguna complicación técnica. Sin embargo, el corolario 8.1 nos dice que para estudiar la compacidad, con la topología débil, en un subconjunto $A \subset X$, únicamente hay que estudiarla en la intersección de A con todos los subespacios separables. Por ello, aunque expondremos la demostración del caso general al final, deduciremos algunos corolarios en espacios de Banach generales a partir del teorema de James en su versión para espacios separables, cuya demostración es más sencilla. Antes de probar el teorema de James, necesitamos considerar algunos lemas.

Lema 8.1. Sea A un subconjunto acotado de un ELC X. Entonces, A es relativamente compacto si y sólo si para cada par de sucesiones $\{x_n\} \subset A$ y $\{\phi_m\} \subset \mathcal{B}(X^*)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \phi_m(x_n)$$

suponiendo que todos los límites existen.

Demostración. Si A es relativamente compacto con la topología débil, existe un punto de acumulación x_0 de $\{x_n\}$, con la topología débil. [13] Además, como $\mathcal{B}(X^*)$ es compacta con la topología débil-estrella por el teorema de Alaoglu 6.1, $\{\phi_n\}$ tiene un punto de acumulación ϕ_0, con dicha topología.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, como $j(x_n) \in X^{**}$ es un funcional continuo con la topología débil-estrella, $\phi_0(x_n)$ es un punto de acumulación de $\{\phi_m(x_n)\}$, luego si el límite existe, entonces $\lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) = \phi_0(x_n)$. De nuevo, $\phi_0 \in X^*$ es continuo con la topología débil, luego $\phi_0(x_0)$ es un punto de acumulación de $\phi_0(x_n)$. Por tanto, si existe el límite, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_0(x_n) = \phi_0(x_0)$$

De manera análoga, se llega a que el otro límite también toma el valor $\phi_0(x_0)$, luego son iguales.

Para el recíproco, como A es acotado, entonces $j(A)$ también es acotado, donde $j : X \to X^{**}$ es la inclusión canónica en el espacio bidual, que es un homeomorfismo sobre su imagen si se dota a X de la topología débil y a X^{**} de la topología débil-estrella. Como las bolas $r\mathcal{B}(X^{**})$ son compactos con la topología débil-estrella (teorema 6.1), luego son cerrados porque esta topología es Hausdorff. Por tanto $\overline{j(A)}^{(db^*)}$ también son acotados con esta topología. Por tanto, $\overline{j(A)}^{(db^*)}$ es compacto, por ser un cerrado del compacto $r\mathcal{B}(X^{**})$ para cierto $r \in (0, \infty)$. De este modo, para ver que A es relativamente compacto, únicamente hace falta ver que $\overline{j(A)}^{(db^*)} \subset j(X)$, puesto que en tal caso, $j^{-1}\left(\overline{j(A)}^{(db^*)}\right)$ será un conjunto compacto que contendrá a A.

Por tanto, si A no es relativamente compacto, existe $\Phi \in \overline{j(A)}^{(db^*)} \setminus j(X)$. Esta condición es equivalente a que Φ no sea continua con la topología débil-estrella, por el teorema 5.2. La continuidad en un espacio vectorial topológico es equivalente a la continuidad en 0, luego existe un entorno U de $0 \in \mathbb{K}$ tal que cada entorno de $0 \in X^*$ con la topología débil estrella contiene a un elemento $\phi \in X^*$ tal que $\Phi(\phi) \notin U$.

Así, dado $x_1 \in A$, existe $\phi_1 \in \mathcal{B}(X^*)$ tal que $|\phi_1(x_1)| < 1$ y $\Phi(\phi_1) \notin U$. Ahora como $\Phi \in \overline{j(A)}^{(db^*)}$, podemos encontrar $x_2 \in A$ tal que $|(j(x_2) - \Phi)(\phi_1)| < \frac{1}{2}$. Nuevamente, por la no continuidad de Φ, existe $\phi_2 \in \mathcal{B}(X^*)$

[13] Esta implicación del teorema de Eberlein-Smulian 8.2 es cierta en cualquier espacio topológico.

tal que $|\phi_2(x_1)| < \frac{1}{2}$, $|\phi_2(x_2)| < \frac{1}{2}$ y, además, $\Phi(\phi_2) \notin U$. Este proceso inductivo contruye dos sucesiones $\{x_n\} \in A$ y $\{\phi_n\} \in \mathcal{B}(X^*)$ que verifican que

$$\begin{aligned} &\text{máx}\{|(j(x_n) - \Phi)(\phi_j)| : j = 1, \dots, n-1\} < \frac{1}{n} \\ &\text{máx}\{|\phi_n(x_j)| : j = 1, \dots, n\} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

donde, además, $\Phi(\phi_n) \notin U \ \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) = 0$$

y que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_m(x_n) = \Phi(\phi_m) \notin U$$

Sin embargo, $\{\Phi(\phi_m)\} \subset \mathbb{R}$ es una sucesión acotada por $\|\Phi\|$, luego contiene una subsucesión convergente a cierto $y \notin U$. Tomando esta subsucesión, se llega a una contradicción. $\square$

Lema 8.2. Sea p una función sublineal en un espacio vectorial X, sea $K \subset X$ un subconjunto convexo, sea $u \in X$ y sean $\alpha, \beta, \beta' \in (0, \infty)$. Si $\text{ínf}\{p(u + \beta x) : x \in K\} > \alpha\beta + p(u)$, entonces existe $x_0 \in K$ tal que

$$\text{ínf}\{p(u + \beta x_0 + \beta' x) : x \in K\} > \alpha\beta' + p(u + \beta x_0)$$

Demostración. Sea $\delta = \text{ínf}\{p(u + \beta x_0 + \beta' x) : x \in K\} - \alpha\beta - p(u) > 0$. Como K es convexo, para todo $x_0, y_1 \in K$ se tiene que $z := \frac{\beta x_0 + \beta' y_1}{\beta + \beta'} \in K$. Entonces, de la subaditividad de p se deduce que

$$p(u + \beta x_0 + \beta' y_1) \geq p\left(\left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right)(u + \beta z)\right) - p\left(\frac{\beta' u}{\beta}\right)$$

De este modo, tomando ínfimos se tiene que

$$\begin{aligned} &\text{ínf}\{p(u + \beta x_0 + \beta' y) : y \in K\} \geq \left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \text{ínf}\{p(u + \beta x) : x \in K\} - \frac{\beta'}{\beta} p(u) = \\ &\left(1 + \frac{\beta'}{\beta}\right) \text{ínf}\{p(u + \beta x) : x \in K\} + \frac{\beta'}{\beta}(\alpha\beta - \text{ínf}\{p(u + \beta x) : x \in K\}) + \frac{\beta'}{\beta}\delta = \\ &\alpha\beta' + \text{ínf}\{p(u + \beta x) : x \in K\} + \frac{\beta'}{\beta}\delta \end{aligned}$$

Por la defición de ínfimo, podemos encontrar un $x_0 \in K$ tal que $p(u + \beta x_0) < \text{ínf}\{p(u + \beta x) : x \in K\} + \frac{\beta'}{\beta}\delta$, lo que completa la prueba. $\square$

Ahora, estamos en condiciones de afrontar la prueba del teorema de James.

Teorema 8.3. (James, caso separable) Sea A un subconjunto acotado y débilmente cerrado de un espacio de Banach real y separable. Si todo funcional continuo de X alcanza su supremo, entonces A es compacto con la topología débil.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que A no es compacto con la topología débil. Por el lema 8.1, podemos suponer, tal vez cambiando de signo las ϕ_m, que existen sucesiones $\{x_n\} \subset A$ y $\{\phi_m\} \subset \mathcal{B}(X^*)$ tales que los siguientes límites existen y verifican que

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \phi_m(x_n) - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) > 0$$

De este modo, para todo k salvo una cantidad finita, que despreciamos, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\phi_k(x_n) - \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n)\right) \geq 2r$$

para cierto $r > 0$. De este modo, $\exists N(k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi_k(x_n) - \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) \geq r \ \forall n \geq N(k)$$

Además, $\mathcal{B}(X^*)$ es compacto con la topología débil-estrella, en virtud del teorema 6.1. Si X es separable, entonces $\mathcal{B}(X^*)$ también es metrizable, luego existe una subsucesión de ϕ_n convergente a $\phi_0 \in \mathcal{B}(X^*)$. [14]

Definimos los conjuntos $K_n = \mathrm{co}\left(\{\phi_m\} : m \geq n\}\right)$ y el funcional sublineal de X^* dado por

$$\sigma_A(\phi) := \sup\{\phi(x) : x \in A\}, \quad \phi \in X^*$$

Por la observación 7.1, todo $\phi \in K_1$ se escribe como $\phi = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \phi_{m_i}$, donde $\lambda_i \geq 0 \; \forall i = 1, \ldots, s$ y $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1$. De este modo, si $n \geq \max\{N(m_1), \ldots, N(m_s)\}$, entonces

$$\sigma_A(\phi - \phi_0) \geq \; (\phi - \phi_0)(x_n) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i (\phi_{m_i} - \phi_0)(x_n) \geq r \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = r$$

Sea también la sucesión de numeros reales definida por $\beta_n := \frac{1}{n!}$. Esta sucesión verifica que

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_i \leq \frac{n!}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k = 0$$

Por el lema 8.2 aplicado con $p = \sigma_A$, $K = K_1 - \phi_0$, $u = 0$, $\alpha = \frac{r}{2}$, $\beta = \beta_1$ y $\beta' = \beta_2$, obtenemos la existencia de $\psi_1 \in K_1$ tal que

$$\inf\{\sigma_A(\beta_1(\psi_1 - \phi_0) + \beta_2(\psi - \phi_0)) : \psi \in K_1\} > \frac{1}{2}\beta_2 r + \sigma_A(\beta_1(\psi_1 - \phi_0))$$

Inductivamente, este lema 8.2, aplicado con $K = K_n - \phi_0$, $u = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_i(\psi_i - \phi_0)$, $\alpha = \frac{r}{2}$, $\beta = \beta_n$ y $\beta' = \beta_{n+1}$ (la hipótesis de inducción es la hipótesis del lema con un conjunto convexo mayor), proporciona la existencia de un $\psi_n \in K_n$ tal que,

$$\inf\left\{\sigma_A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(\psi_i - \phi_0) + \beta_{n+1}(\psi - \phi_0)\right) : \psi \in K_n\right\} \geq \frac{1}{2}\beta_{n+1} r + \sigma_A\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i(\psi_i - \phi_0)\right)$$

El último paso es ver que el funcional, bien definido porque $\|\psi_i\| \leq 1$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ es absolutamente convergente,

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\psi_n - \phi_0)$$

no alcanza su supremo. Supongamos que sí que lo hiciera en un punto $x_0 \in A$, es decir, $\sigma_A(\psi) = \psi(x_0)$. Entonces, denotando por $\gamma := \sup\{\sigma_A(\phi) : \phi \in K_1 - \phi_0\} < \infty$ porque K_1 y A están acotados, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \phi_0)(x_0) = \psi(x_0) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k(\psi_i - \phi_0)(x_0) \geq \psi(x_0) - \gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k = \sigma_A(\psi) - \gamma \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \geq$$
$$\sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \phi_0)\right) - \sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \phi_0) - \psi\right) - \gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \geq$$
$$\sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \phi_0)\right) - 2\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k > \frac{1}{2}\beta_n r + \sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(\psi_k - \phi_0)\right) - 2\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \geq$$
$$\frac{1}{2}\beta_n r + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_k(\psi_k - \phi_0)(x_0) - 2\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k$$

Por tanto,

$$(\psi_n - \phi_0)(x_0) > \frac{1}{2} r - 2\gamma \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} (\psi_n - \phi_0)(x_0) \geq \frac{r}{2}$$

[14] Es en este punto en el que necesitamos que X^* sea separable. Si no asumimos esta hipótesis, sólo podemos asumir que existe un punto de acumulación, pero al no ser este espacio topológico necesariamente I Axioma de numerabilidad, no tiene porque existir una subsucesión convergente a ϕ_0. Esta subsucesión es necesaria en la parte final de la demostración. Así, el caso general del teorema de James requiere alguna complejidad técnica extra.

Sin embargo, como $\lim_{m\to\infty} \phi_m(x_0) = \phi_0(x_0)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\phi_m(x_0) - \phi_0(x_0)| < \epsilon \ \forall m \geq N$. Entonces, $|\psi_m(x_0) - \phi_0(x_0)| < \epsilon \ \forall m \geq N$, es decir, $\lim_{m\to\infty} \psi_m(x_0) = \phi_0(x_0)$, lo que contradice la desigualdad probada. Esta contradicción prueba que ψ no alcanza su supremo.

□

Corolario 8.2. (Krein-Smulian) Si X es un espacio de Banach real y K es débilmente compacto, entonces $\overline{co(K)}$ es débilmente compacto.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que X es separable. Como K es débilmente compacto, ha de ser acotado, puesto que el teorema 8.2 implican que toda sucesión ha de tener una subsucesión débilmente convergente y que, por el teorema 8.1, será acotada.

Por la observación 7.1, $co(K)$ también es acotado. Así, la proposición 4.2 y el teorema 6.1 implican que $\overline{co(K)}$ también es acotado. Si $x^* \in X^*$, de su linealidad, junto con la observacion 7.1, se deduce que $x^*(co(K)) = co(x^*(K))$. Como K es débilmente compacto, existe $x_0 \in K$ tal que

$$x^*(x_0) = \sup\{x^*(K)\} = \sup\{co(x^*(K)\} = \sup\{x^*(co(K))\} = \sup\{x^*(\overline{co(K)})\}$$

donde la última igualdad se debe a que $x^*(\overline{co(K)}) \subset \overline{x^*(co(K))}$ debido a la continuidad de x. Por tanto x^* alcanza su máximo en $x_0 \in \overline{co(K)}$. Como $x^* \in X^*$ es arbitrario, el teorema de James 8.3 implica que $\overline{co(K)}$ es débilmente compacto.

Para ver el caso no separable, sea $\{x_n\} \subset co(K)$. Por la observación 7.1, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto finito $F_n \subset K$ tal que $x_n \in co(F_n)$. Sea $F := \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y sea $M = \overline{\text{Span}(F_n)}$, que es un subespacio separable por el lema 6.1. Así, $K_1 := K \cap M$ es débilmente compacto y $\{x_n\} \subset co(K_1)$. El caso anterior implica que $co(K_1)$ es relativamente compacto, luego el teorema de Eberlein-Smulian 8.2 afirma que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a cierto $x \in \overline{co(K_1)} \subset \overline{co(K)}$ [15]. Nuevamente por el teorema 8.2, $\overline{co(K)}$ es débilmente compacto. □

Teorema 8.4. (James, caso general) Sea A un subconjunto acotado y débilmente cerrado de un espacio de Banach real. Si todo funcional continuo de X alcanza su supremo, entonces A es compacto con la topología débil.

Demostración. Supongamos que A no es débilmente compacto. Entonces, según el corolario 8.1, existe un subespacio separable y cerrado $Y \subset X$ tal que $A_0 := A \cap Y$ no es débilmente compacto, pero sigue siendo cerrado en la topología débil de Y porque esta coincide con la topología como subespacio, por la proposición 5.2. Así, según el lema 8.1, existen sucesiones $\{x_n\} \subset A_0$ y $\{\phi_n\} \subset B(Y^*)$ tales que

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \phi_m(x_n) - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) > 0$$

Por el corolario 4.1, los funcionales ϕ_n se extienden a $\widehat{\phi_n} \in B(X^*)$. Por el teorema 6.1, $B(X^*)$ es compacta con la topología débil-estrella, luego $\{\widehat{\phi_n}\}$ tendrá un punto de acumulación en cierto $\widehat{\phi_0} \in B(X^*)$. La restricción de este funcional a Y, llamémosla $\phi_0 \in \mathcal{B}(Y^*)$ es claramente un punto de acumulación de $\{\phi_n\}$ con la topología débil-estrella de Y. Como la topología débil-estrella es metrizable en $\mathcal{B}(Y^*)$, existe una subsucesión de $\{\phi_n\}$, que denotaremos indistintamente, que converge a ϕ_0 con la topología débil-estrella de Y. En particular, pasando a esta subsucesión, tenemos que $\lim_{m\to\infty} \phi_m(x) = \phi_0(x) \ \forall x \in A_0$.

Por el lema 8.1, existe $r > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $N(K) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\phi_k(x_n) - \lim_{m\to\infty} \phi_m(x_n) \geq r \ \forall n \geq N(k)$$

De este modo, para todo $\psi \in K_1 := co\left(\left\{\widehat{\phi}_n : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$ se tiene que

$$\sigma_A(\psi - \widehat{\phi_0}) = \sup\{\psi(x) - \widehat{\phi_0}(x) : x \in A\} \geq \sup\{\psi(x) - \phi_0(x) : x \in A_0\} \geq r$$

Sea $K_1 := co\left(\left\{\widehat{\phi}_n : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$. Como K_1 es separable, tomamos un subconjunto denso y numerable $\{\theta_n : n \in \mathbb{N}\}$. La sucesión $\{\theta_1, \theta_1, \theta_2, \theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots\}$ tiene puntos de acumulación en todo K_1. Así, sustituimos $\{\theta_n\}$

[15] No distinguimos entre cierre con las topologías débil y de la norma, porque son iguales debido al teorema 5.3

por esta última. Inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $a_k \in A$ y subsucesiones $\{\phi_n^{(k)}\} \subset \{\phi_n^{(k-1)}\}$ tales que

$$\theta_k(a_k) - \liminf_{n\to\infty} \phi_n^{(k-1)}(a_k) > \sigma_A\left(\theta_k - \liminf_{n\to\infty} \phi_n^{(k-1)}\right) - \frac{1}{2^k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n^{(k)}(a_k) = \liminf_{n\to\infty} \phi_n^{(k-1)}(a_k)$$

Si tomamos la subsucesión diagonal $\widetilde{\phi}_n = \phi_n^{(n)}$. Así, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe el límite $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n(a_k) = \lim_{n\to\infty} \phi_n^{(k)}(a_k)$ y verifica para todo $k \in \mathbb{N}$ que

$$\sigma_A\left(\theta_k - \liminf_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n\right) - \frac{1}{2^k} \le \sigma_A\left(\theta_k - \liminf_{n\to\infty} \phi_n^{(k-1)}\right) - \frac{1}{2^k} < \theta_k(a_k) - \lim_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n(a_k) \le \sigma_A\left(\theta_k - \limsup_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n\right)$$

Como todo $\theta \in K_1$ es punto de acumulación de $\{\theta_n\}$

$$\sigma_A\left(f - \liminf_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n\right) = \sigma_A\left(\theta - \limsup_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_n\right) \ \forall \theta \in K_1 \tag{2}$$

Todo lo que hemos hecho anteriormente, vale para la subsucesión $\{\widetilde{\phi}_n\}$, quizá con un punto de acumulación distinto $\widetilde{\phi}_0$ y con un K_1 reducido.

Tal como se hizo en la demostración del teorema 8.3, de manera completamente análoga se construye en funcional utilizando la sucesión $\{\widetilde{\phi}_n\}$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(\psi_n - \widetilde{\phi}_0)$$

donde $\psi_n \in K_n = co\left(\left\{\widetilde{\phi_m} : m \ge n\right\}\right)$ era el elemento dado por el lema 8.2. Consideremos también la sucesión $\{\psi_n\} \subset \mathcal{B}(X^*)$ que contiene un punto de acumulación débil-estrella $\psi_0 \in \mathcal{B}(X^*)$ por compacidad.

Consideremos el funcional

$$\widetilde{\psi} := \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\psi_n - \psi_0)$$

Suponemos que $\widetilde{\psi}$ alcanza su supremo en un punto $x_0 \in A$, es decir, $\widetilde{\psi}(x_0) = \sigma_A(\widetilde{\psi})\ \forall x \in A_0$. Entonces, siendo $\gamma := \sup\{\sigma_A(\phi) : \phi \in K_1 - \psi_0\} < \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \psi_0)(x_0) = \widetilde{\psi}(x_0) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k(\psi_k - \psi_0)(x_0) \ge \ \widetilde{\psi}(x_0) - \gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k = \sigma_A(\widetilde{\psi}) - \gamma \sum_{n+1}^{\infty} \beta_i \ge \\
&\sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \psi_0)\right) - \sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \psi_0) - \widetilde{\psi}\right) - \gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \ge \\
&\sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k(\psi_k - \psi_0)\right) - 2\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k > \frac{1}{2}\beta_n r + \sigma_A\left(\sum_{k=1}^{n-1} \beta_k(\psi_k - \psi_0)\right) - 2\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \ge \\
&\frac{1}{2}\beta_n r + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_k(\psi_k - \psi_0)(x_0) - 2\gamma \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\left\{\sigma_A(\psi_n - \psi_0), \sigma_A(\psi_n - \widetilde{\phi}_0)\right\} \subset \left[\sigma_A\left(\psi_n - \limsup_{k\to\infty} \widetilde{\phi}_k\right), \sigma_A\left(\psi_n - \liminf_{k\to\infty} \widetilde{\phi}_k\right)\right] \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y estos dos últimos son iguales en virtud de la ecuación 2. Por tanto, $\sigma_A(\psi_n - \psi_0) = \sigma_A(\psi_n - \widetilde{\phi}_0)\ \forall n \in \mathbb{N}$ y el desarrollo anterior es análogo al caso separable, puesto que también se verifica la desigualdad del lema 8.2 al sustituir $\widetilde{\phi_0}$ por ψ_0. De este modo, tenemos que

$$(\psi_n - \psi_0)(x_0) > \frac{1}{2}r - 2\gamma\frac{1}{\beta_n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \Rightarrow \liminf_{n\to\infty}(\psi_n - \psi_0)(x_0) \ge \frac{r}{2}$$

lo que contradice que ψ_0 sea un punto de acumulación débil-estrella de $\{\psi_n\}$. □

Corolario 8.3. Dado un espacio de Banach real X tal que $\forall x^* \in X^*$ existe $x \in \mathcal{B}(X)$ tal que $x^*(x) = \|x\|$, entonces X es reflexivo.

Demostración. Por el teorema 8.4, $\mathcal{B}(X)$ es débilmente compacta, luego por el teorema 6.3 es reflexivo. $\square$

Referencias

[1] A.Bowers, N.J.Kalton. *An Introductory Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, 2014.

[2] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[3] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[4] R. B. Holmes. *Geometric Functional Analyisis and Its Applications.* Springer-Verlag. 1975

[5] G. J. O. Jameson. *Topology and Normed Spaces.* Chapman and Hall Mathematics Series. 1974.

[6] P. D. Lax. *Functional Analysis.* Wiley-Interscience, 2002.

[7] M. Manetti. *Topology.* Springer-Verlag, 2015.

[8] R.E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Springer-Verlag, 1998.

[9] J. D. Pyrce. *Weak Compactness in Locally Convex Spaces.* Proc. Amer. Math. Soc.,**17**, 148-155, 1966.

[10] R.J. Whitley. *An Elementary Proof of the Eberlein-Smulian Theorem.* Math. Ann., **172**, 116-118.